3-2 非正弦周期函数展开成傅里叶级数

周期信号是定义在(-∞, ∞)区间，每隔一定时间 T，按相同规律重复变化的信号。一般表示为

$$f(t)=f(t+mT) \qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots \qquad (3\text{-}12)$$

式中，T 为该信号的重复周期，其倒数称为该信号的频率，记为

$$f=\frac{1}{T}$$

或角频率

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

对于非正弦周期函数，根据定理3-1，可以用在区间 (t_0, t_0+T) 内完备的正交函数集来表示。下面讨论几种不同形式的表示式。

一、 三角函数表示式

由上节讨论可知，三角函数集 $\{\cos n\Omega t, \sin m\Omega t\}(n,m=0,1,2,\cdots)$ 在区间 (t_0, t_0+T) 内为完备正交函数集。根据定理3-1，对于周期为 T 的一类信号(函数)中任一个信号 $f(t)$ 都可以精确地表示为 $\{\cos n\Omega t, \sin m\Omega t\}$ 的线性组合，即对于

$$f(t)=f(t+nT)$$

有

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t) \qquad (3\text{-}13)$$

由式(3-10)，得

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ \Omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}14)$$

式(3-13)称为周期信号 $f(t)$ 的三角型傅里叶级数展开式。从数学上讲，当周期信号 $f(t)$ 满足狄里赫利条件时才可展开为傅里叶级数。但在电子、通信、控制等工程技术中的周期信号一般都能满足这个条件，故以后一般不再特别注明此条件。

若将式(3-13)中同频率项加以合并，还可写成另一种形式，即

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (3\text{-}15)$$

比较式(3-13)和式(3-15)，可看出傅里叶级数中各量之间有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan\frac{b_n}{a_n} \\ a_n &= A_n \cos\varphi_n \\ b_n &= -A_n \sin\varphi_n \\ A_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}16)$$

式(3-15)称为周期信号 $f(t)$ 的余弦型傅里叶级数展开式。

式(3-13)和式(3-15)表明，任何周期信号，只要满足狄里赫利条件，都可以分解为许多频率成整数倍关系的正(余)弦信号的线性组合。在式(3-13)中，$a_0/2$ 是直流成分；$a_1\cos\Omega t$，$b_1\sin\Omega t$ 称为基波分量，$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 为基波频率；$a_n\cos n\Omega t$，$b_n\sin n\Omega t$ 称 n 次谐波分量。直流分量的大小，基波分量和各次谐波的振幅、相位取决于周期信号 $f(t)$ 的波形。从式(3-14)和式(3-16)可知，各分量的振幅 a_n，b_n，A_n 和相位 φ_n 都是 $n\Omega$ 的函数，并有：

A_n，a_n 是 $n\Omega$ 的偶函数，即 $\begin{cases} a_n = a_{-n} \\ A_n = A_{-n} \end{cases}$；

φ_n，b_n 是 $n\Omega$ 的奇函数，即 $\begin{cases} -\varphi_n = \varphi_{-n} \\ b_n = -b_{-n} \end{cases}$

例3-2 图3-3所示锯齿波，求其三角型傅里叶级数展开式。

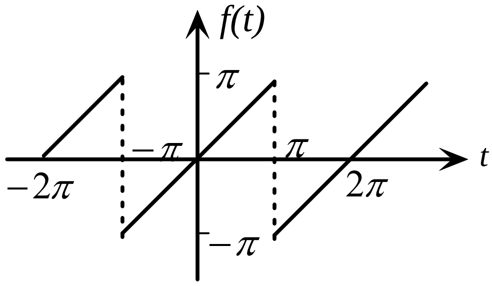

图 3 - 3

解 由图3-3可知，该信号 $f(t)$ 在一个周期区间 $(-\pi, \pi)$ 内，有

$$f(t) = \begin{cases} t & -\pi < t < \pi \\ 0 & t = \pm\pi \end{cases}$$

周期

$$T = 2\pi, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = 1 。$$

由式(3-14)，得

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin\Omega t dt = -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}$$

故该信号 $f(t)$ 的三角型傅里叶级数展开式为

$$f(t) = 2(\sin\Omega t - \frac{1}{2}\sin 2\Omega t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega t + \cdots)$$

二、 指数形式

因为复指数函数集 $\{e^{jn\Omega t}\}(n = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内也是一个完备的正交函数集，其中 $T = \frac{2\pi}{\Omega}$，因此，根据定理3-1，对于任意周期为 T 的信号 $f(t)$ 可在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内表示为

$\{e^{jn\Omega t}\}$ 的线性组合。即

$$f(t)=\sum_{n=\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega} \qquad (3\text{-}17)$$

式中 F_n 由式(3-10)可求得为

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\Omega} \qquad (3\text{-}18)$$

式(3-17)称为周期信号 $f(t)$ 的指数型傅里叶级数展开式。由于 F_n 通常为复数，所以式(3-17)又称为复系数傅里叶级数展开式。

同一个周期信号 $f(t)$，既可以展开成式(3-13)所示的三角型傅里叶级数式，也可以展成式(3-17)所示的指数型傅里叶级数式，所以二者之间必有确定的关系。

因为

$$\cos n\Omega t=\frac{e^{jn\Omega t}+e^{-jn\Omega t}}{2} \qquad \sin n\Omega t=\frac{e^{jn\Omega t}-e^{-jn\Omega t}}{2j}$$

代入式(3-13)，得

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(e^{jn\Omega t}+e^{-jn\Omega t})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2j}(e^{jn\Omega t}-e^{-jn\Omega t})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

所以

$$F_0=\frac{a_0}{2}=A_0$$

$$F_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(a_n-jb_n)=\dfrac{A_n}{2}e^{j\varphi_n} & n=1,2,\cdots\\ \dfrac{1}{2}(a_n+jb_n)=\dfrac{A_n}{2}e^{-j\varphi_n} & n=-1,-2,\cdots\end{cases} \qquad (3\text{-}19)$$

在周期信号展开式(3-17)中，$f(t)$ 表示成复频率为 $0,\pm\Omega,\pm2\Omega,\pm3\Omega,\cdots$ 的指数函数之和。虽然由

于引用 $-n$ 而出现了角频率 $-n\Omega$，但这并不表示实际上存在负频率，而只是将第n项谐波分量写成了两个指数项而出现的一种数学形式。事实上，$e^{jn\Omega t}$ 和 $e^{-jn\Omega t}$ 必然成对出现，且都振荡在 $n\Omega$ 上，它们的和给出了一个振荡频率为 $n\Omega$ 的时间实函数

即

$$\frac{A_n}{2}e^{j\varphi_n}e^{jn\Omega t}+\frac{A_n}{2}e^{-j\varphi_n}e^{-jn\Omega t}=A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

三、 周期信号的对称性与傅里叶系数的关系

要把已知周期信号 $f(t)$ 展开为傅里叶级数，如果 $f(t)$ 为实函数，且它的波形满足某种对称性，则在其傅里叶级数中有些项将不出现，留下的各项系数的表示式也变得比较简单。周期信号的对称关系主要有两种：一种是整个周期相对于纵坐标轴的对称关系，这取决于周期信号是偶函数还是奇函数，也就是展开式中是否含有正弦项或余弦项；另一种是整个周期前后的对称关系，这将决定傅里叶级数展开式中是否含有偶次项或奇次项。下面简单说明函数的对称性与傅里叶系数的关系。

1　偶函数

若周期信号 $f(t)$ 波形相对于纵轴是对称的，即满足

$$f(t)=f(-t) \qquad (3\text{-}20)$$

则 $f(t)$ 是偶函数，其傅里叶级数展开式中只含直流分量和余弦分量，即

$$\left.\begin{aligned} b_n &= 0 \\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt \end{aligned}\right\} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

2　奇函数

若周期信号 $f(t)$ 波形相对于纵坐标是反对称的，即满足

$$f(t)=-f(-t) \qquad (3\text{-}21)$$

此时 $f(t)$ 称为奇函数，其傅里叶级数展开式中只含有正弦项，即

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt \end{aligned}\right\} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

3　奇谐函数

若周期信号 $f(t)$ 波形沿时间轴平移半个周期后与原波形相对于时间轴像对称，即满足

$$f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2}) \qquad (3\text{-}22)$$

则 $f(t)$ 称为奇谐函数或半波对称函数。这类函数的傅里叶级数展开式中只含有正弦和余弦项的奇次谐波分量。

4　偶谐函数

若周期信号 $f(t)$ 波形沿时间轴平移半个周期后与原波形完全重叠，即满足

$$f(t) = f(t \pm \frac{T}{2}) \qquad (3\text{-}23)$$

则 $f(t)$ 为偶谐函数或半周期重叠函数，其傅里叶级数展开式中只含有正弦和余弦波的偶次谐波分量。

熟悉并掌握了周期信号的奇、偶和奇谐、偶谐等性质后，对于一些波形所包含的谐波分量常可以作出迅速判断，并使傅里叶级数系数的计算得到一定简化。

表3-1给出了周期信号波形的各种对称情况、性质，以及对应的傅里叶系数a_n和b_n的计算公式。

表3-1周期信号的对称性与傅里叶系数的关系

函数 $f(t)$	性质	a_0	$a_n(n \neq 0)$	$b_n(n \neq 0)$
偶函数 $f(t) = f(-t)$	只有直流分量和余弦项	$\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt$	0
奇函数 $f(t) = -f(-t)$	只有正弦项	0	0	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt$
奇谐函数	只有奇次	0	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt$	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt$

$f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$	谐波分量		（n为奇数）	（n为奇数）
偶谐函数 $f(t)=f(t\pm\frac{T}{2})$	只有偶次 谐波分量	$\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\Omega t)dt$ （n为偶数）	$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\Omega t)dt$ （n为偶数）

四、傅里叶级数的性质

若 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$，则 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式具有以下性质(证明略)：

（1） $f(-t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{-n} e^{jn\Omega t}$

（2） $f(t-t_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{-jn\Omega t_0} e^{jn\Omega t}$

（3） $f'(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} jn\Omega F_n e^{jn\Omega t}$

$$f^{(k)}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\Omega)^k F_n e^{jn\Omega t}$$

（4） $f(t)\cos\Omega t=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_{n+1}+F_{n-1}}{2} e^{jn\Omega t}$

(5) $f(t)\sin\Omega t=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_{n-1}-F_{n+1}}{2j} e^{jn\Omega t}$