文章编号: 1000 - 8152(2005)03 - 0341 - 07

常见模糊蕴涵算子的模糊系统及其响应函数

李洪兴[1], 彭家寅[2], 王加银[1]
(1. 北京师范大学 数学系,北京 100875; 2. 内江师范学院 数学系,四川 内江 641112)

摘要: 详细讨论了较常见的 21 种模糊蕴涵算子构成的模糊控制器及其响应函数. 主要结果是,异常蕴涵算子模糊控制算法都可归结为某种插值方法,它们相应的模糊控制器均具有函数逼近的泛性且彼此等效;而正常蕴涵算子(包括正规蕴涵算子的导出算子)模糊控制算法均非插值方法,其模糊控制器都不具有函数逼近的泛性,除 Zadeh 蕴涵算子外,这些正常蕴涵算子的模糊控制器均只具备阶跃输出功能且在一定意义下相互等效.

关键词: 模糊逻辑; 模糊推理; 模糊控制; 响应函数; 泛逼近性
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Fuzzy systems and their response functions based on commonly used fuzzy implication operators

LI Hong-xing[1], PENG Jia-yin[2], WANG Jia-yin[1]
(1. College of Mathematics Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;
2. Department of Mathematics, Neijiang Teacher's College, Neijiang Sichuan 641112, China)

Abstract: Fuzzy controllers and their response functions are studied which are based on 21 commonly used fuzzy implication operators. Fuzzy controllers based on irregular implication operators in the 21 ones are regarded as some interpolation functions so that these controllers are universal approximators and are equivalent to each other. Except for Zadeh operator, fuzzy controllers based on regular implication operators in the 21 ones are not universal approximators, they are controllers with only step output ability.

Key words: fuzzy logic; fuzzy inference; fuzzy control; response function; universal approximation

1 引言(Introduction)

文献[1]揭示了基于复合蕴涵规则(CRI)方法的目前常用模糊控制算法都可以归结为某种插值方法,它是对响应函数的逼近. 这意味着,目前常用的模糊控制器均具有函数逼近的泛性,即对任一给定的连续函数能逼近到任意指定的精度. 不过,模糊蕴涵算子还有许多形式没有用于模糊控制器的设计之中. 自然要问:这些常规模糊蕴涵算子构成的模糊控制器是否具有函数逼近的泛性?其模糊控制算法能否归结为某种插值方法?这正是本文要解决的问题. 文献[2,3]列举了较常见的 21 个模糊蕴涵算子,且文献[2]给出了一个能概括这些算子的一般模糊蕴涵算子的定义,并引入了正常蕴涵算子、异常蕴涵算子和正规蕴涵算子的导出算子等概念. 为了便于讨论,本文将这些蕴涵算子如同文献[3]那样给出统一的记号或编号,并就上述问题进行讨论. 首先,以双输入单输出为例,简要回顾一下 Mamdani 控制算法,以便引出几个概念和记号.

设 X, Y 为输入变量论域, Z 为输出变量论域,记 $\mathbf{A} = \{A_i\}_{(1\le i\le n)}$, $\mathbf{B} = \{B_i\}_{(1\le i\le n)}$, $\mathbf{C} = \{C_i\}_{(1\le i\le n)}$, 其中 $A_i \in \mathbf{F}(X)$, $B_i \in \mathbf{F}(Y)$, $C_i \in \mathbf{F}(Z)$, 这里 $\mathbf{F}(X)$, $\mathbf{F}(Y)$, $\mathbf{F}(Z)$ 分别为 X, Y, Z 上模糊集全体. 视 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 为语言变量,由此形成 n 条推理规则:

$$\text{if } x \text{ is } A_i \text{ and } y \text{ is } B_i \text{ then } z \text{ is } C_i,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

这里 $x \in X, y \in Y, z \in Z$ 叫做基础变量. 按 Mamdani 算法,第 i 条推理规则的真域为 $X \times Y$ 到 Z 的模糊关系 $R_i \triangleq (A_i \times B_i) \times C_i$, 其中 $R_i(x, y, z) \triangleq (A_i(x) \wedge B_i(y)) \wedge C_i(z)$. 这 n 条规则之间自然用

收稿日期:2003 - 12 - 23; 收修改稿日期:2004 - 08 - 06.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60474023);教育部博士点基金资助项目(20020027013);教育部科学技术重点项目(03184);数学天元基金资助项目(A0324639);973 国家重大基础研究计划基金资助项目(2002CB312200).

"或"(它对应集合运算"并")来联结,因此 n 条规则总的真域为 $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$,即

$$R(x,y,z) = \bigvee_{i=1}^{n} R_i(x,y,z) = \bigvee_{i=1}^{n} [(A_i(x) \wedge B_i(y) \wedge C_i(z))], \quad (2)$$

给定 $A^* \in \mathbf{F}(X)$, $B^* \in \mathbf{F}(Y)$,则推理结果为 $C^* \in \mathbf{F}(Z)$,它由 CRI 方法来确定: $C^* \triangleq (A^* \times B^*) \circ R$,这里

$$C^*(z) = \bigvee_{(x,y)\in X\times Y} [(A^*(x) \wedge B^*(y)) \wedge R(x,y,z)]. \quad (3)$$

对于一个模糊控制器,输入量为确切量,设为 $(x', y') \in X \times Y$,为了能使用式(3),先将 x' 与 y' 模糊化,即规定两个单点模糊集

$$A'(x) = \begin{cases} 1, & x = x', \\ 0, & x \neq x', \end{cases} \quad B'(y) = \begin{cases} 1, & y = y', \\ 0, & y \neq y', \end{cases}$$

将之代入式(3)并注意到式(2)便得到推理结果 C':

$$C'(z) = R(x',y',z) = \bigvee_{i=1}^{n} [(A_i(x') \wedge B_i(y')) \wedge C_i(z)]. \quad (4)$$

因 C' 是个模糊集,故需经清晰化得到确切数作为对实际控制对象的操作量.常用的方法为"重心法":

$$z' = \int_{\in Z} z C'(z)\,\mathrm{d}z \Big/ \int_{\in Z} C'(z)\,\mathrm{d}z. \quad (5)$$

此外,给定某个论域 X, $\mathbf{A} = \{A_i\}_{(1\le i\le n)}$,为 X 上一族正规模糊集[1,4],峰点为 x_i(即满足 $A_i(x_i) = 1$ 的点),称 $\mathbf{A}$ 为 X 的一模糊划分,如果满足条件: $(\forall i,j)(i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$ 并且 $(\forall x \in X)(\sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1)$,其中 A_i 叫做 $\mathbf{A}$ 的一个基元,从而亦可称为 $\mathbf{A}$ 为 X 的基元组.特别,称 $\mathbf{A}$ 为 X 的一个二相基元组[4],如果对任意 $x \in X$,至多存在 $\mathbf{A}$ 的两个相邻的基元 A_i 和 A_{i+1},使得 $A_i(x) \neq 0 \neq A_{i+1}(x)$.

2 基于正常蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数(Fuzzy controllers and their response functions based on regular implication operators)

2.1 基于 Zadeh 蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数(Fuzzy controllers and their response functions based on Zadeh implication operator)

Zadeh 蕴涵算子 $R_z(a,b) = (1-a) \vee (a \wedge b)$ 是模糊系统理论中常见的蕴涵算子之一[5,6].设 X, Y 分别为输入和输出变量论域, $\mathbf{A} = \{A_i\}_{(1\le i\le n)}$ 和 $\mathbf{B} = \{B_i\}_{(1\le i\le n)}$ 分别为 X 和 Y 的模糊划分.无妨约定 X, Y 均为实数区间,即

$$X = [a,b], \quad Y = [c,d],$$

其中

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b,$$
$$c < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < d,$$

这里 x_i, y_i 分别为 A_i, B_i 的峰点.此外恒假定 A_i, B_i 为可积函数.

定理 1 在上述假定下,存在一组基函数 $\mathbf{A}' = \{A_i'\}_{(1\le i\le n)}$ 使得单输入单输出 Zadeh 蕴涵算子模糊控制器在形式上近似为以 A_i' 为基函数的一元分段拟合函数:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i'(x)\, y_i. \quad (6)$$

不过,当 $\mathbf{A}$ 为 X 的二相基元组且 $n \ge 3$ 时,式(6)退化为一个阶跃输出函数:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{y_n - c} y_i = \mathrm{const}.$$

证 视 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 为语言变量,由此形成 n 条推理规则:

$$\text{if } x \text{ is } A_i \text{ then } y \text{ is } B_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \quad (7)$$

第 i 条推理规则的真域为 X 到 Y 的模糊关系 R_i,它由 Zadeh 蕴涵算子来确定:

$$R_i(x,y) \triangleq (1 - A_i(x)) \vee (A_i(x) \wedge B_i(y)).$$

这 n 条规则总的真域为 $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$,即

$$R(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} R_i(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} [(1 - A_i(x)) \vee (A_i(x) \wedge B_i(y))].$$

对于给定的输入 $x' \in X$,类似式(4)有

$$B'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} [(1 - A_i(x')) \vee (A_i(x') \wedge B_i(y))],$$

再仿照式(5)便得到确切的响应值:

$$y' = \int y B'(y)\,\mathrm{d}y \Big/ \int B'(y)\,\mathrm{d}y. \quad (8)$$

命 $h_1 = y_1 - c$, $h_i = y_i - y_{i-1}$ $(i = 2,3,\cdots,n)$ 且

$$h = \max\{h_i \mid 1 \le i \le n\},$$

因 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为模糊划分,故它们具有 Kronecker 性质:

$$A_i(x_j) = \delta_{ij} = B_i(y_j).$$

按照定积分的定义,便有

$$y' = \frac{\int y B'(y)\,\mathrm{d}y}{\int B'(y)\,\mathrm{d}y} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i B'(y_i)\, h_i}{\sum_{i=1}^{n} B'(y_i)\, h_i} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i\{\bigvee_{k=1}^{n}[(1-A_k(x'))\vee(A_k(x')\wedge B_k(y_i))]\}y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i\{\bigvee_{k=1}^{n}[(1-A_k(x'))\vee(A_k(x')\wedge B_k(y_i))]\}}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[A_i(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))]y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[A_i(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))]}.$$

记

$$\alpha_i(x')\triangleq h_i\Big/\sum_{j=1}^{n}h_j[A_j(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))],$$

置 $A_i'(x')\triangleq\alpha_i(x')[A_i(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))]$,

则

$$y'\approx\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x')[A_i(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))]y_i=\sum_{i=1}^{n}A_i'(x')y_i.$$

若取 **A** $'\triangleq\{A_i'\}_{(1\le i\le n)}$,再命 $F(x)\triangleq\sum_{i=1}^{n}A_i'(x)y_i$,显然 $F(x)$ 在形式上是以 A_i' 为基函数的一元分段拟合函数. 注意,当 **A** $'$为 X 的一个二相基元组且 $n\ge3$ 时,必有某一 $A_j(x')=0$,于是

$$F(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[A_i(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))]y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[A_i(x')\vee(\bigvee_{k=1}^{n}(1-A_k(x')))]}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i=\text{const},$$

这便得到本定理的后半部分结论.　　证毕.

现在考虑双输入单输出的情况. 设 X,Y 为输入变量论域, Z 为输出变量论域, **A** $=\{A_i\}_{(1\le i\le n)}$, **B** $=\{B_i\}_{(1\le i\le n)}$, **C** $=\{C_i\}_{(1\le i\le n)}$ 分别为 X,Y,Z 的模糊划分. 记 $Z=[e,f]$ 且设 z_i 为 C_i 的峰点,满足 $e<z_1<z_2<\cdots<z_n<f$,并假定 C_i 也为可积函数.

定理2　在上述假定下,存在一组基函数 $\Phi=\{\varphi_i\}_{(1\le i\le n)}$,使得双输入单输出 Zadeh 蕴涵算子模糊控制器在形式上近似为以 φ_i 为基函数的二元分片拟合函数:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x,y)z_i.\qquad(9)$$

不过,当 **A** 和 **B** 分别为 X 和 Y 的二相基元组且 $n\ge3$ 时,式(9)退化为一个阶跃输出函数:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i=\text{const}.$$

证　按 Zadeh 蕴涵算子,注意式(1)并仿式(2)时, n 条规则的总真域为

$$R(x,y,z)=\bigvee_{i=1}^{n}[(1-(A_i(x)\wedge B_i(y)))\vee(A_i(x)\wedge B_i(y)\wedge C_i(z))].$$

对于给定的输入 $(x',y')\in X\times Y$,类似式(4)有

$$C'(z)=\bigvee_{i=1}^{n}[(1-(A_i(x')\wedge B_i(y')))\vee(A_i(x')\wedge B_i(y')\wedge C_i(z))].$$

令 $h_1=z_1-e$, $h_i=z_i-z_{i-1}(i=2,3,\cdots,n)$,由式(5)及定积分的定义并注意到 A,B 和 C 都为模糊划分,知

$$z'=\frac{\int_e^f zC'(z)\mathrm{d}z}{\int_e^f C'(z)\mathrm{d}z}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}z_iC'(z)h_i}{\sum_{i=1}^{n}C'(z)h_i}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[(\bigvee_{k=1}^{n}(1-(A_k(x')\wedge B_k(y'))))\vee(A_i(x')\wedge B_i(y'))]z_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[(\bigvee_{k=1}^{n}(1-(A_k(x')\wedge B_k(y'))))\vee(A_i(x')\wedge B_i(y'))]}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x',y')z_i.$$

其中已置

$$\varphi_i(x',y')\triangleq$$

$$\frac{h_i[(\bigvee_{k=1}^{n}(1-(A_k(x')\wedge B_k(y'))))\vee(A_i(x')\wedge B_i(y'))]}{\sum_{j=1}^{n}h_j[(\bigvee_{k=1}^{n}(1-(A_k(x')\wedge B_k(y'))))\vee(A_j(x')\wedge B_j(y'))]}.$$

取 $F(x,y)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x,y)z_i$,便得出式(9). 此外,当 **A** 和 **B** 分别为 X 和 Y 的二相基元组且 $n\ge3$ 时,必存在某个 $A_j(x')\wedge B_j(y')=0$. 类似定理1的证明,便得到后半部分结论.　　证毕.

注1　不难验证,在式(6)中, $F(x_i)\neq y_i$;式(9)中, $F(x_i,y_i)\neq z_i$;严格地讲,式(6)和式(9)分别决定的函数 $F(x)$ 和 $F(x,y)$ 均不是插值函数,充其量叫做拟合函数.

注2　定理1,2表明,在一定条件下,Zadeh 蕴涵算子模糊控制器近似为一个阶跃输出函数,显然它们不具备泛逼近性,从而 Zadeh 蕴涵算子几乎不能用于模糊控制系统之中.

2.2　基于简单正常蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数(Fuzzy controllers and their response functions based on simple regular implication operators)

在多值逻辑系统与模糊系统理论中, Lukasiewicz 蕴涵算子

$$R_{\mathrm{Lu}}(a,b)=(1-a+b)\wedge 1,$$

Kleene-Dienes 蕴涵算子

$$R_{\mathrm{KD}}(a,b)=(1-a)\vee b,$$

Reichenbach 蕴涵算子

$$R_{\mathrm{R}}(a,b)=1-a+ab,$$

$R^{(1)}$ 蕴涵算子

$$R^{(1)}(a,b)=1\wedge(1-a^p+b^p)^{\frac{1}{p}},\ p>0,$$

以及 $R^{(2)}$ 蕴涵算子

$$R^{(2)}(a,b)=1\wedge(1-a+2ab-a^2b)$$

都是表达形式简单的正常蕴涵算子. 本节讨论这些简单正常蕴涵算子模糊控制器及其输出函数.

定理 3 在定理 1 的条件下, 单输入单输出 Lukasiewicz 蕴涵算子模糊控制器近似为一个阶跃输出函数:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i=\text{const}. \tag{10}$$

证 按 Lukasiewicz 蕴涵算子并注意到式(7), 有 n 条推理规则的总真域:

$$R(x,y)=\bigvee_{i=1}^{n}[(1-A_i(x)+B_i(y))\wedge 1].$$

对于给定的输入 $x'\in X$, 仿式(3), (4) 有

$$B'(y)=\bigvee_{i=1}^{n}[(1-A_i(x')+B_i(y))\wedge 1],$$

再由式(8) 知

$$y'=\frac{\int yB'(y)\,\mathrm{d}y}{\int B'(y)\,\mathrm{d}y}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}y_iB'(y_i)h_i}{\sum_{i=1}^{n}B'(y_i)h_i}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k=1}^{n}((1-A_k(x')+B_k(y_i))\wedge 1)]y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k=1}^{n}((1-A_k(x')+B_k(y_i))\wedge 1)]}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i=\text{const}.$$

若取 $F(x)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i$, 便得欲证结论.

定理 4 在定理 2 的条件下, 双输入单输出 Lukasiewicz 蕴涵算子模糊控制器近似为一个阶跃输出函数:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i=\text{const}. \tag{11}$$

证 依 Lukasiewicz 蕴涵算子的定义并注意到式(1), n 条推理规则的总真域为

$$R(x,y,z)=\bigvee_{i=1}^{n}[(1-(A_i(x)\wedge B_i(y))+C_i(z))\wedge 1].$$

对于给定 $(x',y')\in X\times Y$, 类似于(3), (4) 两式有

$$C'(z)=\bigvee_{i=1}^{n}[(1-(A_i(x')\wedge B_i(y'))+C_i(z))\wedge 1],$$

再由式(5) 便知

$$z'=\frac{\int zC'(z)\,\mathrm{d}z}{\int C'(z)\,\mathrm{d}z}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}z_iC'(z_i)h_i}{\sum_{i=1}^{n}C'(z_i)h_i}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k=1}^{n}((1-(A_k(x')\wedge B_k(y'))+C_k(z_i))\wedge 1)]z_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k=1}^{n}((1-(A_k(x')\wedge B_k(y'))+C_k(z_i))\wedge 1)]}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i=\text{const}.$$

若取 $F(x,y)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i$, 便得到定理 4.

注 3 定理 3 和定理 4 说明, Lukasiewicz 蕴涵算子模糊控制器只具备阶跃输出功能, 而无函数逼近的泛性, 从而 Lukasiewicz 蕴涵算子几乎不能用于模糊控制系统之中.

注 4 定理 2 和定理 4 中, 关于规则的完备性见文献[1].

其次, 考虑 Kleene-Dienes 蕴涵算子, Reichenbach 蕴涵算子和 $R^{(1)}$ 蕴涵算子模糊控制器及其响应函数的情况. 事实上, 类似定理 3 和定理 4 的证明, 我们有

定理 5 在定理 1(定理 2) 的条件下, 单(双) 输入单输出 Kleene-Dienes 蕴涵算子模糊控制器, Reichenbach蕴涵算子模糊控制器和 $R^{(1)}$ 蕴涵算子模糊控制器都具有与定理 3(定理 4) 完全相同的结论.

最后, 看 $R^{(2)}$ 蕴涵算子的情形.

定理 6 在定理 1 的条件下, 单输入单输出 $R^{(2)}$ 蕴涵算子模糊控制器近似为一个阶跃输出函数:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i=\text{const}. \tag{12}$$

证明是直接的, 从略. 类似于定理 3 和定理 4 的证明, 还有

定理 7 在定理 2 的条件下, 双输入单输出 $R^{(2)}$ 蕴涵算子模糊控制器近似为一个阶跃输出函数:

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i=\text{const}. \tag{13}$$

2.3 正常蕴涵算子模糊控制器及其响应函数(Fuzzy controllers and their response functions based on regular implication operators)

Gödel 蕴涵算子

$$R_G(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ b, & a>b,\end{cases}$$

Goguen 蕴涵算子

$$R_{Go}(a,b)=\begin{cases}1, & a=0,\\ (b/a)\wedge 1, & a\ne 0,\end{cases}$$

Gaines-Rescher 蕴涵算子

$$R_{GR}=\begin{cases}1, & a\le b,\\ 0, & a>b,\end{cases}$$

Yager 蕴涵算子

$$R_Y(a,b)=\begin{cases}1, & b=0,\\ b^a, & b\ne 0,\end{cases}$$

R_0 蕴涵算子

$$R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ (1-a)\vee b, & a>b,\end{cases}$$

$R^{(3)}$ 蕴涵算子

$$R^{(3)}(a,b)=\begin{cases}1-a, & b=0,\\ b, & a=1\\ 1, & \text{其它},\end{cases}$$

$R^{(4)}$ 蕴涵算子

$$R^{(4)}(a,b)=\begin{cases}1, & a<1,\\ b, & a=1,\end{cases}$$

$R^{(5)}$ 蕴涵算子

$$R^{(5)}(a,b)=\begin{cases}1, & a\vee b=1,\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

在模糊系统或多值逻辑系统中扮演着非常重要的角色,它们均表示为分段函数.本节考虑这些正常蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数.

定理 8　在定理 1 的条件下,单输入单输出 Gödel 蕴涵算子模糊控制器具有与定理 3 完全相同的结论.

证　首先,此时的推理关系(即真域)为

$$R(x,y)=\bigvee_{i=1}^{n}R_G(A_i(x),B_i(y)).$$

对给定的输入 $x'\in X$,仿式(4)有

$$B'(y)=\bigvee_{i=1}^{n}R_G(A_i(x'),B_i(y)),$$

再由式(8)知

$$y'=\frac{\int yB'(y)\,\mathrm{d}y}{\int B'(y)\,\mathrm{d}y}\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}y_iB'(y_i)h_i}{\sum_{i=1}^{n}B'(y_i)h_i}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k=1}^{n}R_G(A_k(x'),B_k(y_i))]y_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i[\bigvee_{k=1}^{n}R_G(A_k(x'),B_k(y_i))]}=$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}h_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i=\text{const}.$$

若取 $F(x)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i$,则得出式(10).　　证毕.

定理 9　在定理 2 的条件下,双输入单输出 Gödel 蕴涵算子模糊控制器具有与定理 4 完全相同的结论.

证明是直接的,从略.类似于定理 8 之证,还有

定理 10　在定理 1(定理 2)的条件下,单(双)输入单输出 Goguen 蕴涵算子模糊控制器,Gaines-Rescher 蕴涵算子模糊控制器,Yager 蕴涵算子模糊控制器,R_0 蕴涵算子模糊控制器,$R^{(3)}$ 蕴涵算子模糊控制器,$R^{(4)}$ 蕴涵算子模糊控制器和 $R^{(5)}$ 蕴涵算子模糊控制器都具有与定理 3(定理 4)完全相同的结论.

注 5　从定理 1～10 可知,除 Zadeh 蕴涵算子外,前面所列的 13 个正常蕴涵算子构成的模糊控制器都近似为阶跃输出函数,它们不具备泛逼近性,故几乎不能用于模糊控制系统之中.

3 基于异常蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数(Fuzzy controllers and their response functions based on irregular implication operator)

文献[3]指出,Mamdani 蕴涵算子 $R_M(a,b)=a\wedge b$,代数积蕴涵算子 $R_A(a,b)=ab$,$R^{(6)}$ 蕴涵算子 $R^{(6)}(a,b)=0\vee(a+b-1)$ 和 $R^{(7)}$ 蕴涵算子 $R^{(7)}=\begin{cases}a\wedge b, & a\vee b=1,\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$ 都是异常蕴涵算子,尽管这些异常蕴涵算子不是二值逻辑中蕴涵算子的推广,但其在模糊推理的应用中是不能忽视的.文献[1]已给出 Mamdani 蕴涵算子的模糊控制器及其插值机理,本节考虑其余三者的情况.

定理 11　在定理 1 的条件下,存在一组基函数 $\mathbf{A}'=\{A_i'\}_{(1\le i\le n)}$ 使得单输入单输出代数积蕴涵算子模糊控制器近似为以 A_i' 为基函数的一元分段插值函数:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i'(x)y_i,\tag{14}$$

且基函数组 $\mathbf{A}'$ 恰为 X 的一个模糊划分;特别,当 $\{y_i\}_{(1\le i\le n)}$ 为 Y 的等距划分时, $\mathbf{A}'$ 蜕化为 $\mathbf{A}$,即

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) y_i.$$

证 依代数积蕴涵算子的定义并注意式(7),总的模糊推理关系(即总真域)为

$$R(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n}(A_i(x) B_i(y)).$$

对于给定的输入 $x'\in X$,类似于式(4)有

$$B'(y) = \bigvee_{i=1}^{n}(A_i(x') B_i(y)),$$

从式(8)知

$$y' = \frac{\int yB'(y)\,\mathrm{d}y}{\int B'(y)\,\mathrm{d}y} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i B'(y_i) h_i}{\sum_{i=1}^{n} B'(y_i) h_i} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i[\bigvee_{k=1}^{n}(A_k(x') B_k(y_i))] y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i[\bigvee_{k=1}^{n}(A_k(x') B_k(y_i))]} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i A_i(x') y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i A_i(x')} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x') A_i(x') y_i = \sum_{i=1}^{n} A_i'(x') y_i,$$

其中已置 $A_i'(x') \triangleq \alpha_i(x') A_i(x')$ 且命 $\alpha_i(x') \triangleq h_i\Big/\sum_{j=1}^{n} h_j A_j(x')$. 若记 $A' = \{A_i'\}_{(1\le i\le n)}$,取 $F(x)\triangleq \sum_{i=1}^{n} A_i'(x) y_i$,显然 $F(x)$ 是以 A_i' 为基函数的一元分段插值函数.

此外,不难验证 $\mathbf{A}'=$ 为 X 的模糊划分. 最后,当 $\{y_i\}_{(1\le i\le n)}$ 为 Y 的等距划分时,即 $(\forall i)(h_i = h)$, $\alpha_i(x) = h_i\Big/\sum_{j=1}^{n} h_j A_j(x) = 1\Big/\sum_{j=1}^{n} A_j(x) = 1$. 因此 $A_i' = A_i$,即 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$;这时 $F(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) y_i$.

定理 12 在定理 2 的条件下,存在一组基函数 $\Phi = \{\phi_i\}_{(1\le i\le n)}$ 使得双输入单输出代数积蕴涵算子模糊控制器近似为以 ϕ_i 为基函数的二元分片插值函数:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x,y) z_i. \tag{15}$$

证明是直接的,从略. 关于 $R^{(6)}$ 和 $R^{(7)}$ 蕴涵算子模糊控制器,类似于定理 11 的证明,我们有

定理 13 在定理 1(定理 2)的条件下,单(双)输入单输出 $R^{(6)}$ 蕴涵算子模糊控制器, $R^{(7)}$ 蕴涵算子模糊控制器与定理 11(定理 12)有完全相同的结论.

注 6 从文献[1]的定理 1,2 及本文的定理 11～13 知,异常蕴涵算子模糊控制算法都可归结为某种插值方法,这些模糊控制器一般来讲应当是彼此等效的,且具有函数逼近的泛性.

4 基于正规蕴涵算子的导出算子模糊控制器及其响应函数(Fuzzy controllers and their response functions based on normal implication operator)

文献[3]指出, $R^{(8)}$ 蕴涵算子

$$R^{(8)}(a,b) = \begin{cases} 1, & a\le b,\\ 1-a, & a>b,\end{cases}$$

$R^{(9)}$ 蕴涵算子

$$R^{(9)}(a,b) = \begin{cases} 1, & a\le b,\\ (1-a)/(1-b), & a>b,\end{cases}$$

$R^{(10)}$ 蕴涵算子

$$R^{(10)}(a,b) = \begin{cases} b, & a\ne b,\\ 1, & a=b,\end{cases}$$

$R^{(11)}$ 蕴涵算子

$$R^{(11)}(a,b) = \begin{cases} 1, & a\le b,\\ \log a/\log b, & a>b,\end{cases}$$

为正规蕴涵算子的导出算子,这些算子仍为正规蕴涵算子且是一类特殊的正常蕴涵算子. 本节讨论这些特殊的正常蕴涵算子模糊控制器及其响应函数.

定理 14 在定理 1 的条件下,单输入单输出 $R^{(8)}$ 蕴涵算子模糊控制器具有与定理 3 完全相同的结论.

证 依 $R^{(8)}$ 蕴涵算子并注意到式(7)知, n 条推理规则的总真域为

$$R(x,y) = \bigvee_{i=1}^{n} R^{(8)}(A_i(x), B_i(y)).$$

对于给定的输入 $x'\in X$,仿式(4)得

$$B'(y) = \bigvee_{i=1}^{n} R^{(8)}(A_i(x'), B_i(y)),$$

由式(8)有

$$y' = \frac{\int yB'(y)\,\mathrm{d}y}{\int B'(y)\,\mathrm{d}y} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i B'(y_i) h_i}{\sum_{i=1}^{n} B'(y_i) h_i} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i[\bigvee_{k=1}^{n} R^{(8)}(A_k(x'), B_k(y_i))] y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i[\bigvee_{k=1}^{n} R^{(8)}(A_k(x') B_k(y_i))]} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{y_n - c} y_i = \mathrm{const}.$$

若取 $F(x) \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{y_n - c} y_i$, 便得到式(10). 证毕.

定理 15　在定理 2 的条件下,双输入单输出蕴涵算子模糊控制器具有与定理 4 完全相同的结论.

证明是直接的,从略. 类似于定理 14 的证明,我们还有

定理 16　在定理 1(定理 2) 的条件下,单(双) 输入单输出 $R^{(9)}$ 蕴涵算子模糊控制器, $R^{(10)}$ 蕴涵算子模糊控制器, $R^{(11)}$ 蕴涵算子模糊控制器都具有与定理 3(定理 4) 完全相同的结论.

注 7　定理 14～16 表明,正规蕴涵算子的导出算子模糊控制器也只具有阶跃输出功能,而无函数逼近的泛性,因此它们几乎不能用于模糊控制系统之中.

5　结论(Conclusions)

文中详细地讨论了较常见的 21 种模糊蕴涵算子构成的模糊控制器及其响应函数,主要结果如下:

1) 这 21 种蕴涵算子中的正常蕴涵算子(包含正规蕴涵算子的导出算子) 所构造的模糊控制器均非插值函数,它们不具有函数逼近的泛性,因此它们几乎不能用于模糊控制系统之中.

2) 除 Zadeh 蕴涵算子模糊控制器外,正常蕴涵算子(含正规蕴涵算子的导出算子) 模糊控制器都近似为阶跃输出函数,故它们几乎不能用于模糊控制系统之中.

3) 在实际模糊控制系统中,输入论域的模糊划分往往为二相基元组,如果使用 Zadeh 蕴涵算子模糊控制器,那么该控制器常常只具备阶跃输出功能,而无函数逼近的泛性.

4) 异常蕴涵算子模糊控制器都可归结为某种插值方法,它们相应的模糊控制器均具有函数逼近的泛性且在一定意义下相互等效,从而可以用于模糊控制系统之中.

此外,这些结果不难推广到多输入多输出的复杂系统,因为这将是多元向量值的插值问题.

参考文献(References):

[1] 李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. 中国科学(E 辑), 1998, 28(3): 259 - 267.
(LI Hongxing. Interpolation mechanism of fuzzy control [J]. Science in China (Series E), 1998, 41(3): 312.)

[2] 吴望名. 模糊推理的原理和方法[M]. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994.
(WU Wangming. Principles and Methods of Fuzzy Reasoning [M]. Guiyang: Guizhou Science and Technology Press, 1994.)

[3] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
(WANG Guojun. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning [M]. Beijing: Science Press, 2000.)

[4] 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1 - 14.
(LI Hongxing. To see the success of fuzzy logic from mathematical essence of fuzzy control [J]. Fuzzy Sets and Mathematics, 1995, 9(4): 1 - 14.)

[5] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑), 2002, 32(2): 230 - 246.
(SONG Shiji, WU Cheng. Reverse triple I method of fuzzy reasoning [J]. Science in China (Series E), 2002, 32(2): 230 - 246.)

[6] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 约束算法[J]. 自然科学进展, 2002, 12(1): 95 - 100.
(SONG Shiji, WU Cheng. Reverse triple I method of restriction degree of fuzzy reasoning [J]. Progress in Nature Science, 2002, 12(1): 95 - 100.)

作者简介:

李洪兴　(1953 —), 男, 教授, 北京师范大学数学科学学院博士生导师, 主要研究领域为模糊数学与人工智能, E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn;

彭家寅　(1962 —), 男, 内江师范学院数学系副教授, 研究领域为模糊数学;

王加银　(1974 —), 男, 北京师范大学数学科学学院副教授, 主要研究领域为模糊控制.