

想写本信号完整性的书，征询意见

- 1、您希望书中包含哪些信号完整性内容？
- 2、类似于本章这样的详细程度您认为合适么？
- 3、您喜欢那种语言风格，是严谨的还是稍稍随意一点的？
- 4、本书定位：[适合工程师的理论](#)。不追求理论的严谨，注重易懂易用。您认为是否合适？
- 5、有其他的想法也可以告诉我！！

可以到我的网站留言提出您的意见：www.sig007.com

或直接给我发邮件：yu@sig007.com。

希望得到您的反馈，写本适合中国工程师的信号完整性书籍。

截止时间，2010年9月1日

于博士信号完整性研究网 于争

2010-5-23

以下是草稿样章，只是搭了个框架，还没修改，仅供参考！这章公式较多，后续章节不会有这么多公式。

第 2 章 数字信号频谱与带宽

2.1 周期信号的单边谱

周期信号可表示为：

$$x(t+nT) = x(t) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

T 称为信号周期，周期 T 的倒数为该信号的基频，记为 f_0

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

对应基频的角频率为

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

由数学分析可知，任何周期信号都可以表示成无穷多个正弦函数和余弦函数之和，称为傅里叶级数或傅里叶展开。周期函数 $x(t)$ 可表示为：

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) \\ &\quad + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

为了更清楚的表示周期信号的频谱特性，把上式中同频率项合并。为此，改写上式为：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) - \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right] \right\}$$

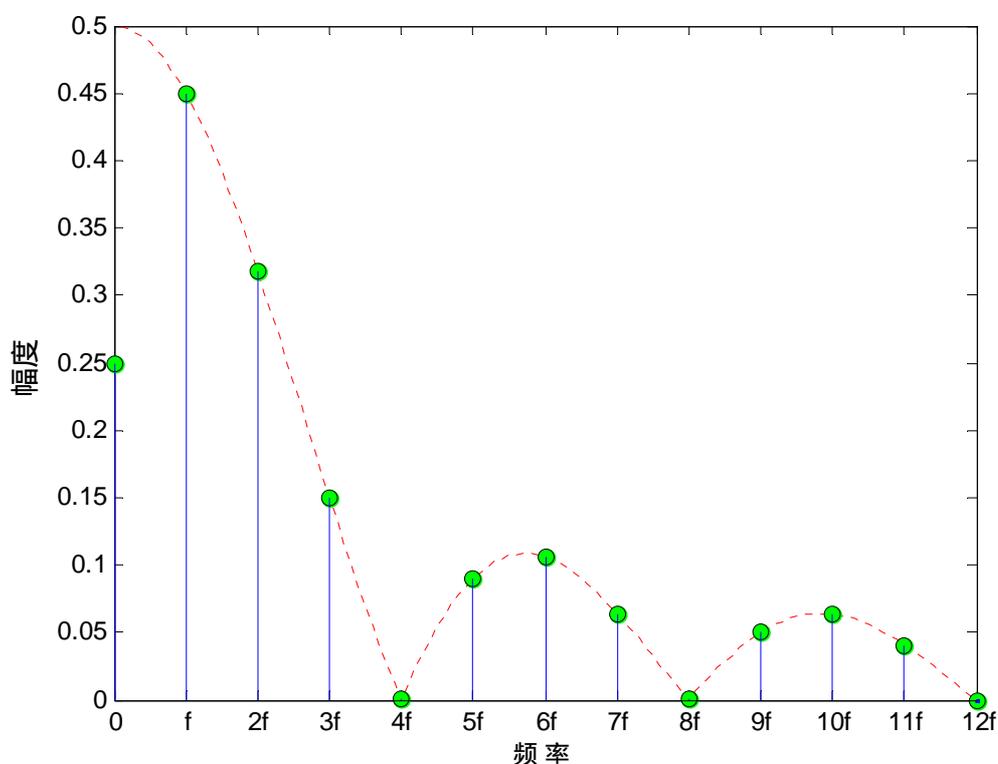
对上式做变量代换，令

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n &= \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \end{aligned}$$

带入等式得：

$$\begin{aligned}
 x(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \left[\cos(\phi_n) \cos(n\omega_0 t) - \sin(\phi_n) \sin(n\omega_0 t) \right] \right\} \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \right]
 \end{aligned}$$

其中： $c_0 = a_0$ 为周期函数的直流分量， $c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$ 称为谐波分量。 $n = 1$ 时谐波分量称为基波， n 取其他值时谐波分量分别称为二次谐波、三次谐波……等。显然 a_n 、 b_n 、 c_n 以及 ϕ_n 都是频率 $n\omega_0$ 的函数， c_n 表示信号中各次谐波分量的摆幅，如果将 c_n 与频率 $n\omega_0$ 的关系在直角坐标系画出来就得到周期信号的幅度频谱或简称幅度谱，**如图所示**。同样还可画出各分量的相位 ϕ_n 与频率 $n\omega_0$ 的关系图，称为相位频谱或简称相位谱。这种频谱的特点是只包含正的频率分量，称为单边谱。因为现实中的单频信号一定是正频率的，单边谱能直观的显示实际信号的频谱特性，工程中使用的也最多。



单边谱图

提示：信号完整性中，使用单边谱来研究信号的带宽，物理含义更清晰。

注意在单边谱中，傅里叶系数 c_n 是实数，其与频率 $n\omega_0$ 的关系代表的是幅度谱。相位 ϕ_n 包含在 $\cos(n\omega_0 t + \phi_n)$ 中，也就是这种表示方式中幅度与相位是分离的，在表达式中能直观地看到。

2.2 周期信号的双边谱

周期信号傅里叶展开也可以表示成指数形式，指数形式的傅里叶展开系数更容易计算，也是常用的形式。本节利用傅里叶展开的基本形式推导出指数形式的级数表达式，并得到两种展开方式的关系。

重写傅里叶级数表达式如下：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

根据欧拉公式：

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

将式()代入式()中并合并相同指数项的系数得到

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

考察指数项的系数，令

$$F(n\omega_0) = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

根据式()可知 a_n 是关于 n 的偶函数， b_n 是关于 n 的奇函数，即

$$a_n = a_{-n}$$

$$b_n = -b_{-n}$$

代入 $e^{-jn\omega_0 t}$ 系数中有

$$\frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2} = F(-n\omega_0)$$

因此周期函数可表示成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} + F(-n\omega_0) e^{-jn\omega_0 t}]$$

如果令 $F(0 \cdot \omega_0) = a_0$ ，则周期函数可表示为一种简单的级数形式，称为周期函数的指数形式傅里叶展开。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

其中：

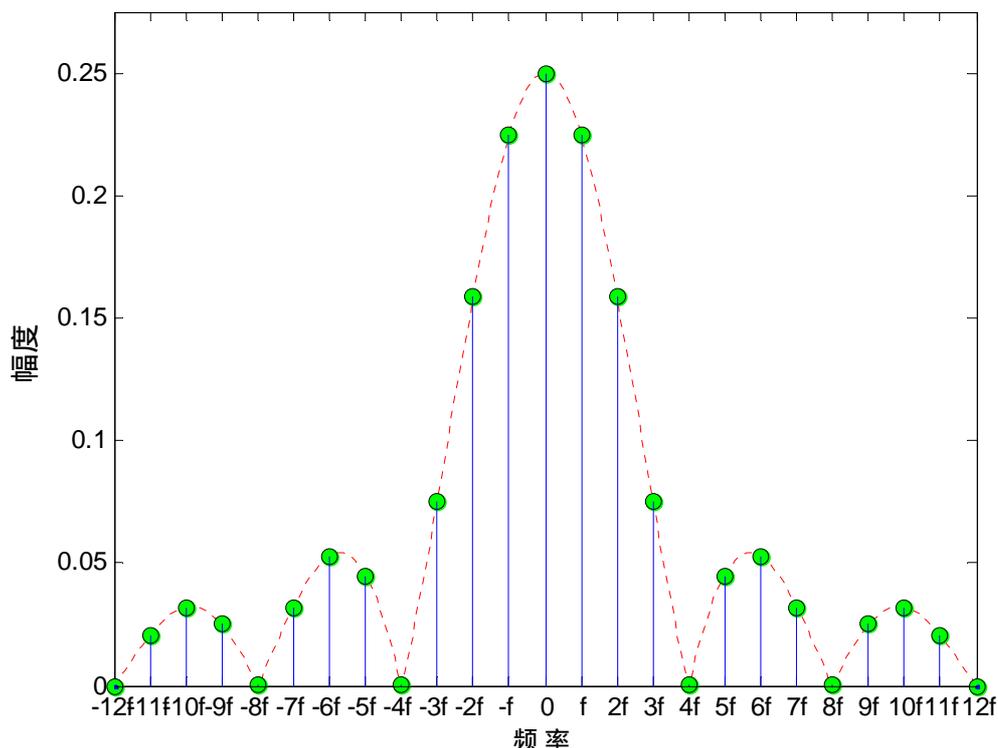
$$\begin{aligned} F(n\omega_0) &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) [\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

$$F(0 \cdot \omega_0) = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

由于这种指数形式的表达式中，傅里叶系数的计算相对简单，因此理论分析中经常用到这种形式的傅里叶展开方式。

指数形式的傅里叶展开中，系数 $F(n\omega_0)$ 是复数，与频率有关。在直角坐标系中画出 $|F(n\omega_0)|$ 与频率 $n\omega_0$ 的关系，就得到另一种形式的幅度频谱。根据式()可知， n 即可以取正值，也可以取负值，因此幅度频谱中包含负的频率成分，这种频谱图称作双边谱，如图

所示。 $F(n\omega_0)$ 的相位与频率 $n\omega_0$ 的关系，同样包含正负两种频率，称为双边相位谱。



图双边幅度谱

在复数形式的展开式中，指数项 $e^{-jn\omega_0 t}$ 仅代表谐波的频率，频谱的幅度和相位信息都包含在系数 $F(n\omega_0)$ 中。

提示：在研究数字信号的带宽时，使用双边谱更容易计算。

2.3 单边谱与双边谱的关系

不论是单边谱还是双边谱，代表的是同一个函数的频谱特性，因此两种频谱图之间必然存在某种联系。

对于周期信号，三角函数形式的傅里叶展开式中，系数为实数，而且只包含正的频率分量，其物理含义很明显，能清晰的看到包含哪些频率分量，各个频率分量的幅度有多大，相位有多大。而复指数形式傅里叶级数的表示式中，除了包含正的频率分量 $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0 \dots$ 外，还包含 $-\omega_0, -2\omega_0, -3\omega_0 \dots$ 等负频率分量，系数 $F(n\omega_0)$ 为复数，各频率分量的相位信息也不明显，似乎傅里叶级数的物理含义已经丢失，但事实并非如此。实际上，两种形式的展开式中，各个频率分量的幅度和相角存在着固定的关系。

为了方便起见，下面的讨论中把 $F(n\omega_0)$ 记为 F_n ，把 $F(0 \cdot \omega_0)$ 记为 F_0 。两种展开式归纳如下。

三角函数展开式：

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)]$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = \text{artan} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

指数形式的展开式：

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$F_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

比较两种展开式可得到：

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = c_0$$

$$|F_n| = \left| \frac{a_n - jb_n}{2} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n$$

$$\angle F_n = \text{artan} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = \phi_n \quad (n > 0)$$

由此我们可以得到这样的结论：

1. 单边谱和双边谱中直流分量的幅度相等。
2. 单边谱中某一个频率分量的幅度是双边谱中对应频率分量幅度的 2 倍。
3. 单边谱中某一个频率分量的相位与双边谱中对应的正频率分量相位相同。

提示：通过计算双边谱的幅度和相位，很容易得到单边谱的幅度和相位，这是计算上的捷径。

实际上，单边谱中每根谱线代表一个频率分量，该频率分量具有真实的物理意义。而双边谱中，把每一个具有物理意义的频率分量用两根谱线表示出来，其中一个是正频率分量，一个是负频率分量。只有把正负频率上的两根谱线矢量相加才能得到一个具有物理意义的频率分量。

另外在双边谱中，正负频率分量之间也存在固定的关系，正负两个频率分量幅度相等。相位关系可根据 a_n 、 b_n 的奇偶特性得到：

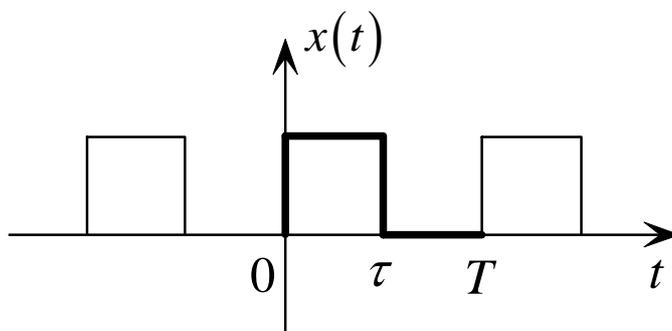
$$\angle F_{-n} = \text{artan} \left(\frac{-b_{-n}}{a_{-n}} \right) = -\text{artan} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = -\phi_n = -\angle F_n$$

即正负两个频率分量得相位符号相反。由双边谱来求得单边谱时，单边谱的相位应根据双边谱的正频率分量部分得到。

有了两种频谱之间的关系，就可以通过求解双边谱来得到单边谱，进而得到具有实际物理意义的傅里叶级数表达式。

2.4 理想方波信号的频谱

假设 $x(t)$ 为理想方波信号，脉宽为 τ ，周期为 T ，占空比为 $D = \frac{\tau}{T}$ ，方波幅度为 1，如图所示。



为了得到理想方波信号的单边谱，将该信号展开成三角函数形式的傅里叶级数：

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)]$$

其中基波频率 $f_0 = \frac{1}{T}$ ，对应的基波角频率 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。系数 c_0 可直接计算得到

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} 1 \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T 0 \cdot dt = \frac{\tau}{T}$$

为了求解各次谐波的系数 c_n 和相角 ϕ_n ，首先计算指数形式展开式的系数 F_n

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} 1 \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{\tau}^T 0 \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{jn\omega_0} (1 - e^{-jn\omega_0 \tau}) \right] \end{aligned}$$

对上式进一步变换，将其变成包含幅度和相位的表达式

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{jn\omega_0} (1 - e^{-jn\omega_0\tau}) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{jn\omega_0} e^{-j\frac{n\omega_0\tau}{2}} \left(e^{j\frac{n\omega_0\tau}{2}} - e^{-j\frac{n\omega_0\tau}{2}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{jn\omega_0} e^{-j\frac{n\omega_0\tau}{2}} 2j \sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[\frac{\tau}{\frac{n\omega_0\tau}{2}} e^{-j\frac{n\omega_0\tau}{2}} \sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_0\tau}{2}} e^{-j\frac{n\omega_0\tau}{2}}
 \end{aligned}$$

当 $n > 0$ 时, F_n 的幅度和相位分别为:

$$|F_n| = \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}} \right|$$

$$\phi_n = \angle F_n = \begin{cases} \left[-\frac{n\pi\tau}{T} \right]_{2\pi} & \text{当 } \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) > 0 \\ \left[-\frac{n\pi\tau}{T} + \pi \right]_{2\pi} & \text{当 } \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) < 0 \end{cases}$$

$[]_{2\pi}$ 表示对 2π 求余。利用双边谱和单边谱的关系, 可以得到三角函数展开式中第 n 的谐波系数角相角

$$c_n = 2|F_n| = \frac{2\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}} \right|$$

$$\phi_n = \angle F_n = \begin{cases} \left[-\frac{n\pi\tau}{T} \right]_{2\pi} & \text{当 } \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) > 0 \\ \left[-\frac{n\pi\tau}{T} + \pi \right]_{2\pi} & \text{当 } \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) < 0 \end{cases}$$

进一步, 假设占空比 $D = \frac{\tau}{T} = 50\%$, 则系数与相角分别为:

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$\phi_n = -\frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

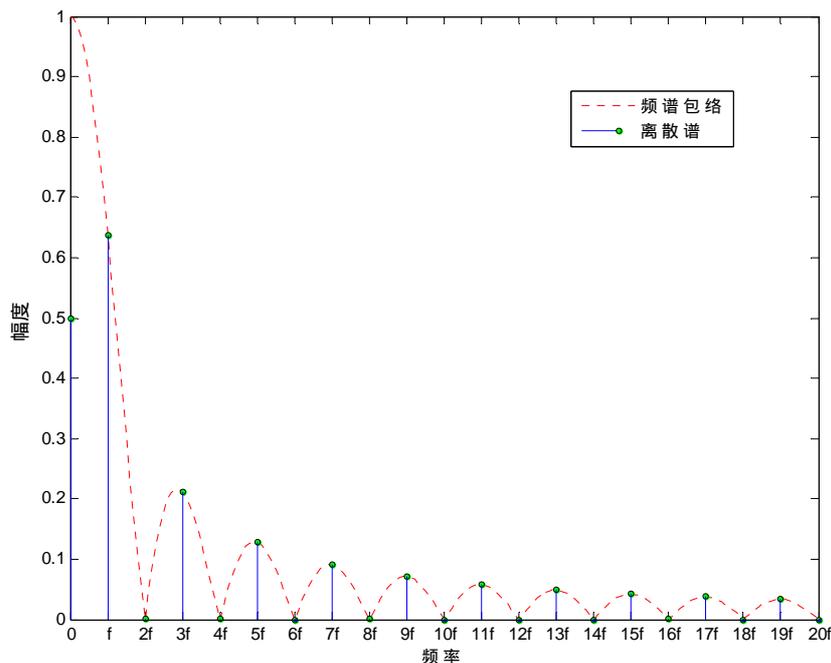
将式()和式()代入式()中得到 50%占空比的方波信号的级数表达式为：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3\pi} \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{5\pi} \cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5\omega_0 t) + \dots \end{aligned}$$

可见占空比为 50%的方波信号，可以表示成无穷多个正弦函数的叠加。其频谱中只包含奇次谐波，所有偶数谐波的幅度都为 0，即不含偶次谐波。下面的 Matlab 代码用于计算周期性方波信号的离散频谱，结果如图 10-10 所示，图中清晰的反映出了占空比为 50%的方波信号的频谱特征。

```
% ===== %
% 方波信号的离散单边谱
% ===== %

clc; clear all; pack;
f0 = 10e6; % 10 MHz
T = 1/f0; % 周期
D = 0.50; % 占空比
tol = D*T; % 高电平脉宽
A = 1; % 幅度
N = 20;
% 单边谱包络
f = (0.1:0.1:N)/T;
S_temp = 2*(A*tol/T)*abs(sin(pi*f*tol)./(pi*f*tol));
fx = [0,f];
S_env = [2*(A*tol/T),S_temp];
% 离散谱线
n = 1:1:N;
temp_discrete = 2*(A*tol/T)*abs(sin(n*pi*tol/T)./(n*pi*tol/T));
x = [0,n]/T;
val_discrete = [A*tol/T, temp_discrete];
figure
plot(fx,S_env,'r:')
hold on
stem(x,val_discrete,'MarkerEdgeColor','g','MarkerFaceColor','g','MarkerSize',2)
hold off
set(gca,'XTick',0:1/T:20/T)
set(gca,'XTickLabel',{'0','f','2f','3f','4f','5f','6f','7f','8f','9f','10f',...
'11f','12f','13f','14f','15f','16f','17f','18f','19f','20f'})
xlabel('频率')
ylabel('幅度')
```

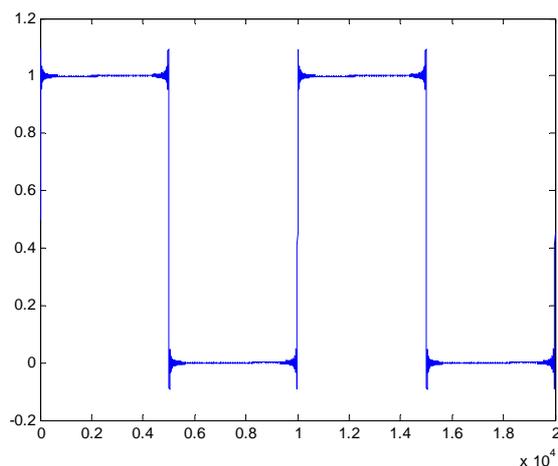


得到理想方波信号的频谱后，根据级数表达式，我们可以由频域信息来合成时域波形，进而观察各次谐波分量对信号时域波形的影响。

下面的 Matlab 代码根据式 () 来合成重复频率为 $1MHz$ 的方波信号。方波的幅度为 1，占空比为 50%。为了演示合成效果，程序中包含了前 217 谐波分量，带宽达到了 $217MHz$ ，合成波形如图 所示，不要被不连续点出的震荡所迷惑，那是著名的吉布斯现象。

```

% ===== %
% 合成方波信号
% ===== %
clc; clear all; pack;
Fs = 10e9;
Nsamp = 2e4;
t = [0:Nsamp-1].*(1/Fs);
f0 = 1e6;
x_dc = 1/2;
S_square = x_dc;
for n=1:2:217
    S_square = S_square + 2/(pi*n) * sin(2*pi*n*f0*t);
end
figure
plot(S_square)
    
```



2.5 方波信号的频谱特征

研究信号带宽时，我们关心的是信号幅度谱的特征，而方波信号的幅度谱作为一种参考具有特别的意义。本节详细研究方波信号的频谱特征。

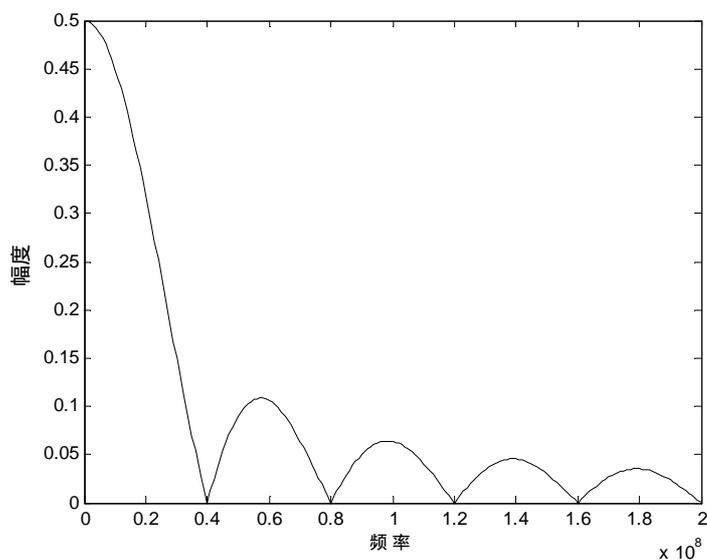
由式（）可知，方波信号的幅度谱可表示为：

$$c_n = \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)}{\frac{n\omega\tau}{2}} \right| = \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0 \tau} \right|$$

对于周期信号，其幅度频谱只在一系列离散点取值。对于不同的占空比，各次谐波的幅值不同。但根据式（）可知，各次谐波的幅度一定是一条包络线的离散取样该包络线表现的是连续谱特征，为得到包络线，以连续频率 f 代替式（）中的离散频率值

$$c = \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right|$$

式（）即为理想方波信号频谱幅度包络线。图（）显示了该包络线的形状。



图

现在我们来研究这条包络线的特征,关键点在于确定幅度随频率变化的趋势。为了清晰的显示变化趋势,通常采用对数坐标,对幅度值取对数,如式()所示。

$$20\log_{10} C = 20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) + 20\log_{10}\left|\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\right|$$

1) 当 $\pi f\tau \ll 1$ 时,随着 f 趋近于 0,包络幅度可近似表示为:

$$20\log_{10} C = 20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) + 20\log_{10} 1 = 20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

即随着 f 趋近于 0,包络幅度趋近于一个恒定值 $20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right)$ 。若在幅度谱上画上一条水平直线

$$y = 20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

则该直线就是频率趋近于 0 时幅度谱的渐进线。

2) 当 $\pi f\tau \gg 1$ 时,随着 f 趋近于无穷大,包络幅度可近似表示为:

$$20\log_{10} C = 20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\pi f\tau}\right)$$

也就是说式()记为频率趋于无穷大时幅度谱包络的渐进线。但这中形式的曲线还不能让我们对幅度谱的变化有一个直觉的认识。有趣的是,如果频率轴也采用对数坐标,这条渐进线会变成一条直线。为此,引入十倍频程概念,当频率从 f_1 变化到 f_2 且 $f_2 = 10f_1$ 时,我们说频率变化了一个十倍频程。现在我们来研究频率变化一个十倍频程时,这条渐进线的幅度变化量

$$\begin{aligned} & \left[20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\pi f_2\tau}\right) \right] - \left[20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\pi f_1\tau}\right) \right] \\ &= 20\log_{10}\left(\frac{\pi f_1\tau}{\pi f_2\tau}\right) \\ &= 20\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right) \\ &= -20dB \end{aligned}$$

注意这里并没有指定频率 f_1 具体值,只要满足 $\pi f\tau \gg 1$ 即可。这说明当频率增大时,每增加一个十倍频程,幅度下降 $-20dB$ 。因此当频率轴也采用对数坐标时,该渐进线变为一条斜率为 $-20dB/十倍频程$ 的直线。

整个频谱包络可用两条渐进线来描述,第一条渐进线的斜率为 $0dB/十倍频程$,第二条渐进线的斜率为 $-20dB/十倍频程$,在两条渐进线的交点处有:

$$20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{\tau}{T}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{1}{\pi f\tau}\right)$$

故交点频率为:

$$f = \frac{1}{\pi\tau}$$

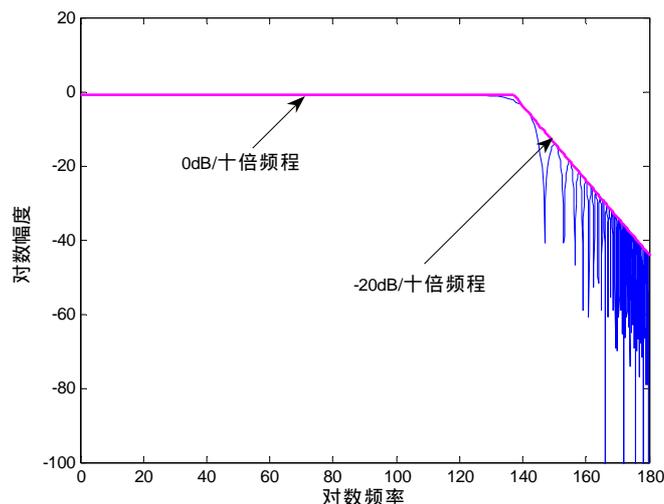
在该频率点之前,包络幅度基本不变,在该频率点之后,包络幅度以 $-20dB/十倍频程$ 的斜率下降。

下面的 Matlab 代码用于计算方波信号的频谱包络线及其渐进线,方波信号的频率为 $10MHz$,这里选择的占空比为 0.45,用于模拟非 50% 占空比的情况。程序首先计算出单边

谱包络（注意单边谱与双边谱系数的2倍关系），并将频率及频谱幅度都用对数表示。然后计算出理论分析得到的两条渐进线。最后把对数频谱包络与渐进线在一张图中画出来，如果理论分析正确的话，两条渐进线会与包络线准确相切。图 10-10 为该段代码得到的结果，图中我们可以清晰的看到得到的结果与理论分析完全吻合。

```
% ===== %
% 非50%占空比方波信号频谱包络及渐进线
% ===== %

clc; clear all; pack;
f0 = 10e6; % 10 MHz
T = 1/f0; % 周期
D = 0.45; % 占空比
tol = D*T; % 高电平脉宽
A = 1; % 幅度
% 解析法计算单边谱包络
N = 100;
f = (0.1:0.1:N)*f0;
S_tem = 2*(A*tol/T)*abs(sin(pi*f*tol)./(pi*f*tol));
S_env = [2*(A*tol/T),S_tem];
% 转换为对数坐标
f_db = [0,20*log10((0.1:0.1:N)/T)];
db_S_env = 20*log10(S_env);
% 产生渐进线
f1 = linspace(0.01,1/(pi*tol),1000);
y1 = 20*log10(2*A*tol/T).*ones(size(f1));
f2 = linspace(1/(pi*tol),N*f0,1000);
y2 = 20*log10(2*A*tol/T) + 20*log10(abs(1./(pi*f2*tol)));
% 画对数幅度谱及渐进线
figure
plot(f_db,db_S_env)
hold on
plot(20*log10(f1),y1,'m','LineWidth',2)
plot(20*log10(f2),y2,'m','LineWidth',2)
hold off
axis([0 max(f_db) -100 20])
xlabel('对数频率')
ylabel('对数幅度')
```



图

以上分析对所有周期性方波信号都有效。现在我们回到占空比为 50% 的理想方波信号这一特殊情况，下面的 Matlab 代码用于计算占空比为 50% 的理想方波这一特殊情况的离散谱及其渐近线。因为占空比为 50% 的理想方波信号频谱中所有偶次谐波分量都为 0，只包含奇次谐波，并且包络曲线的每个旁瓣中刚好只包含一个奇次谐波分量，所以该频谱能清晰的反映出包络变化的特征。图中显示了各次谐波分量的幅度、包络线、两条渐进线的情况，横坐标和纵坐标分别采用对数坐标，各次谐波的幅度刚好在一条直线上。

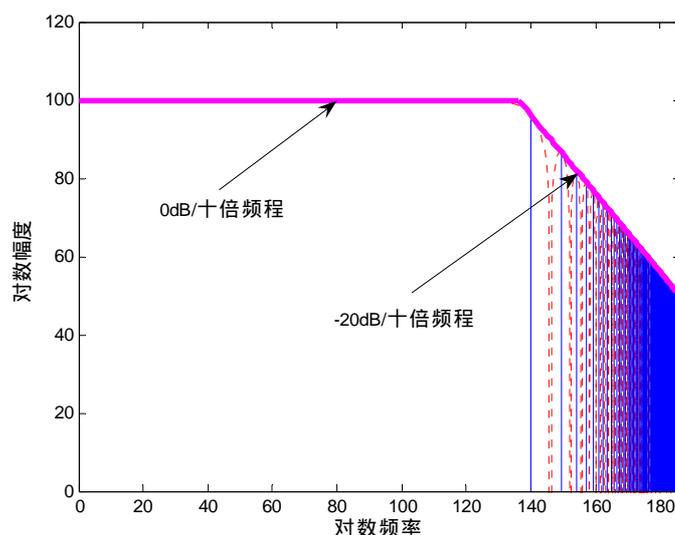
```
% ===== %
% 50%占空比方波信号的离散谱及渐近线
% ===== %

clc; clear all; pack;
f0 = 10e6; % 10 MHz
T = 1/f0; % 周期
D = 0.50; % 占空比
tol = D*T; % 高电平脉宽
A = 1; % 幅度
N = 200;
% 单边频谱包络
f = (0.1:0.1:N)/T;
S_temp = 2*(A*tol/T)*abs(sin(pi*f*tol)./(pi*f*tol));
fx = [0, f];
S_env = [2*(A*tol/T), S_temp];
% 离散谱线
n = 1:1:N;
temp_discrete = 2*(A*tol/T)*abs(sin(n*pi*tol/T)./(n*pi*tol/T));
val_discrete = [A*tol/T, temp_discrete];
% 转换为对数坐标
f_db = [0, 20*log10((0.1:0.1:N)/T)];
db_S_env = [20*log10(2*A*tol/T), 20*log10(S_temp)];
x_db = 20*log10((1:2:N)/T);
db_val_discrete = 20*log10(val_discrete(2:2:end));
% 产生渐进线
```

```

f1 = linspace(0.01,1/(pi*tol),1000);
y1 = 20*log10(2*A*tol/T).*ones(size(f1));
f2 = linspace(1/(pi*tol),N*f0,1000);
y2 = 20*log10(2*A*tol/T) + 20*log10(abs(1./(pi*f2*tol)));
% 绘图显示
figure
plot(f_db,db_S_env+100,'r:')
hold on
stem(x_db,db_val_discrete+100,'MarkerEdgeColor','g','MarkerFaceColor','g',
'MarkerSize',1)
plot(20*log10(f1),y1+100,'m','LineWidth',3)
plot(20*log10(f2),y2+100,'m','LineWidth',3)
hold off
axis([0 max(f_db) 0 120])
xlabel('对数频率')
ylabel('对数幅度')

```



图

2.6 信号带宽与上升时间的关系

2.4 节的已经说明了由信号的频谱可以得到时域波形，实质上是傅里叶逆变换过程，只不过对于周期信号来说，这一傅里叶逆变换过程更明显的表现为一组单频信号的加权和的形式。对于理想方波信号，上升时间为 0，每一个频率分量都是必须的，因此理论上理想方波信号带宽是无穷大的。尽管如此，无穷大的带宽对实际工程应用没有什么实际意义，信号频谱中各个频率分量的贡献是不同的。我们已经知道了频率趋于无穷大时方波信号的频谱幅度以 $-20\text{dB}/十倍频程$ 的速度衰减，对于某个频率分量，如果其频谱幅度足够小，以至于我们可以把它对波形的贡献忽略掉，那么我们就可以不必考虑它的影响，这就是定义信号带宽的根本原因。使用有限带宽的频谱来代替无穷宽的频谱，进而得到一个对原信号的可接受的近似，对工程应用更具有实际意义。

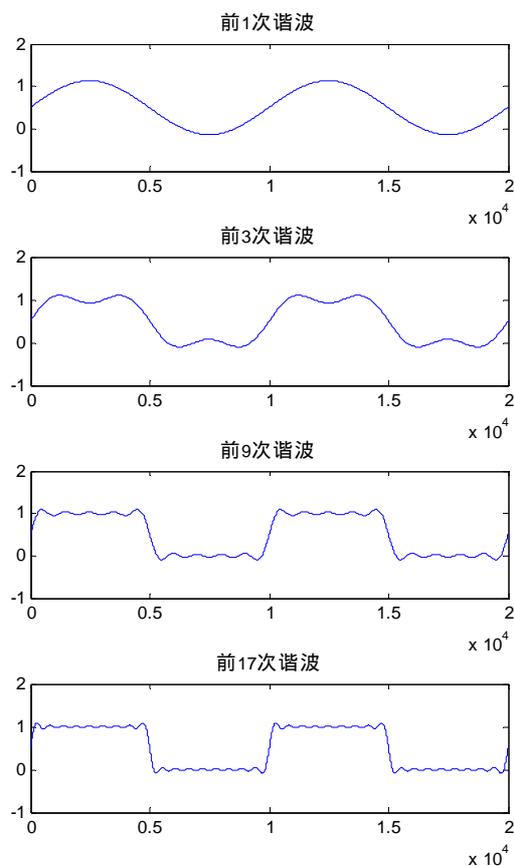
现在的问题是信号频谱中各个频率分量是如何影响信号时域波形的？理解这一问题最

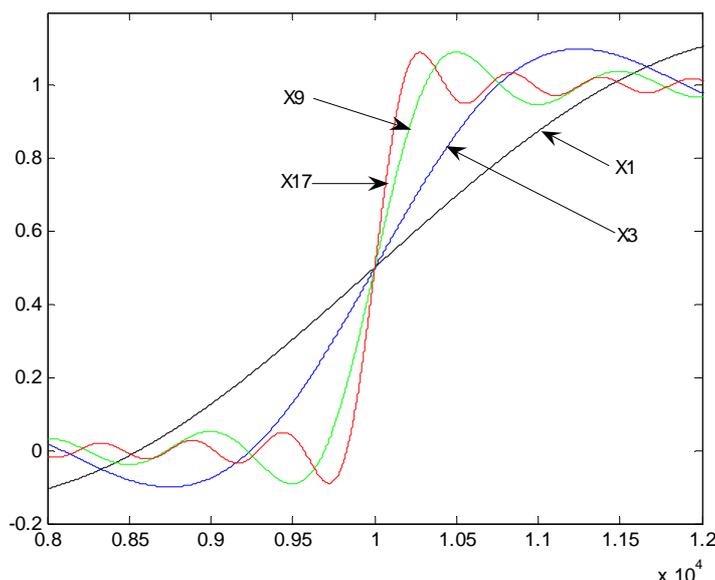
直观有效的方法是仿真实验，冗长的数学推导对于工程应用没多大的意义。要想在工程中应用某种知识，直觉非常重要，通过仿真实验可以让我们很容易的建立一种直觉的认识。下面的一段 matlab 代码用于仿真不同带宽下合成的信号有何差别。程序中我们假定方波信号周期 T 为 $1\mu\text{s}$ ，基波频率为 $f_0 = 1\text{MHz}$ ，同时假定占空比为精确的 50%，幅度为 1。这样我们就可以利用式 () 来合成信号的时域波形，程序中 $X1$ 只包含 1 次谐波，对应带宽为 $BW = 1\text{MHz}$ 。 $X3$ 只包含前 3 次谐波，对应带宽为 $BW = 3\text{MHz}$ 。 $X9$ 只包含前 9 次谐波，对应带宽为 $BW = 9\text{MHz}$ 。 $X17$ 只包含前 17 次谐波，对应带宽为 $BW = 17\text{MHz}$ 。

```
% ===== %
% 带宽与上升时间关系
% ===== %
clc; clear all; pack;
Fs = 10e9;
Nsamp = 2e4;
t = [0:Nsamp-1].*(1/Fs);
f0 = 1e6;
x_dc = 1/2;
x1 = x_dc + (2/pi)*sin(2*pi*f0*t);          % 只包含1次谐波
x3 = x_dc;                                  % 前3次谐波
for n=1:2:3
    x3 = x3 + (2/(pi*n)) * sin(2*pi*n*f0*t);
end
x9 = x_dc;                                  % 前9次谐波
for n=1:2:9
    x9 = x9 + (2/(pi*n)) * sin(2*pi*n*f0*t);
end
x17 = x_dc;                                  % 前17次谐波
for n=1:2:17
    x17 = x17 + (2/(pi*n)) * sin(2*pi*n*f0*t);
end
figure('NumberTitle','off','Name','不同级别近似')
subplot(411)
plot(x1)
title('前1次谐波')
subplot(412)
plot(x3)
title('前3次谐波')
subplot(413)
plot(x9)
title('前9次谐波')
subplot(414)
plot(x17)
title('前17次谐波')
% 局部放大显示上升时间差别
figure('NumberTitle','off','Name','上升时间比较')
plot(x1,'k')
```

```
hold on
plot(x3, 'b')
plot(x9, 'g')
plot(x17, 'r')
hold off
axis([8000 12000 -0.2 1.2])
```

仿真结果如图1所示，所取的信号带宽越大，合成的波形越接近于理想方波波形，也就是说带宽越大，合成波形对理想方波的近似越好，近似的好坏表现之一就是信号的上升边随带宽增大而变陡，换句话说，带宽越大，合成波形上升时间越小。我们把 X_1 、 X_3 、 X_9 、 X_{17} 画在一张图中，并对上升边进行放大显示，得到图2，该图直观的显示了带宽与波形上升时间的关系。从图中可以清晰的看到上升时间随带宽的变化情况。

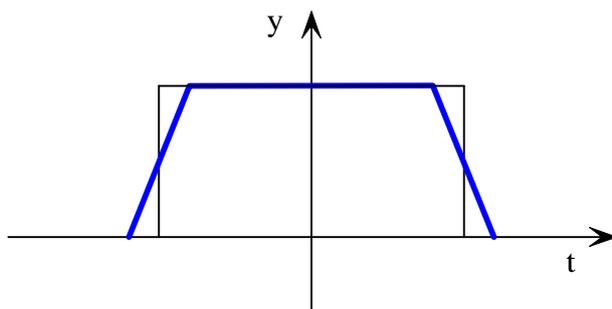




至此，我们得到结论：**所选信号带宽越大，波形上升时间越小。从另一个角度来说，波形上升时间越小，信号带宽越大。**

信号带宽与上升时间的关系是信号完整性问题的基础和前提。要想理解信号完整性问题就必须对信号上升时间和带宽的关系有深刻的认识。

在上面的例子中，我们使用的是上升时间为 0 的理想方波。实际上，不论上升时间是 0 还是有限值（比如 1ns），信号频谱中所含的频率分量必然是无限多的。但是正如在仿真实验中所看到的，我们只需相对小的带宽就可以合成一个上升时间非 0 的信号，而合成上升时间为 0 的理想方波则需要无限大的带宽，从这个角度出发，我们很容易形成一个直觉的认识：与上升时间为 0 的理想方波频谱相比，上升时间非 0 的信号频谱中，高频分量一定衰减的更快，只有这样才能使高频成份的贡献更小。这是一种直觉的猜测，事实是否如此？我们仍然用仿真实验来验证这一结论的正确性。这里使用梯形波来表示一个上升时间不为 0 的波形。图 1 显示出实验中使用的两个波形之间的关系。

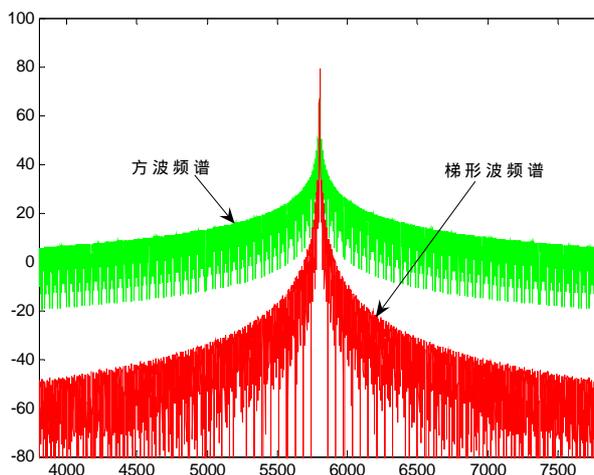


从根据傅里叶分析的知识，我们知道周期信号的频谱是离散谱，而相同波形非周期信号频谱是连续谱，而且周期信号的频谱是对非周期信号频谱的离散取样。所以非周期信号的频谱实际上是周期信号频谱的包络，只要知道非周期信号的频谱，就可以知道周期信号频谱的变化趋势。因此，仿真中我们画出连续谱。下面的 Matlab 代码对两个信号波形分别作 FFT 计算，然后画出其幅度谱，其中频谱幅度采用对数坐标。图中清晰的显示出了方波与梯形波频谱的不同，梯形波频谱中高频成分的衰减要比方波快得多。仿真实验验证了我们的直觉猜测的正确性，现在我们可以得到确切的结论并给出合理的解释。上升时间越小，信号带宽越大，说明高频成分对信号的贡献越大。如果信号上升时间较长，使用相对较小的带宽就可以合成信号波形，说明高频成分的贡献要小得多。反映在频谱上，**高频成分的频谱幅度相对较小，因此上升时间越长，频谱中高频成分衰减越快。**

```

% ===== %
% 梯形波与方波的频谱对比
% ===== %
clc; clear all; pack;
N = 1000; M = 800;
S0 = [zeros(1,M+N/2), ones(1,8000+N), zeros(1,M+N/2)];
S1 = [zeros(1,M), linspace(0,(N-1)/N, N), ...
      ones(1,8000), linspace((N-1)/N, 0, N), zeros(1,M)];
S0f = 20*log10(abs(fftshift(fft(S0))));
S1f = 20*log10(abs(fftshift(fft(S1))));
figure
plot(S0f,'g')
hold on
plot(S1f,'r')
hold off
axis([3800 7800 -80 100])

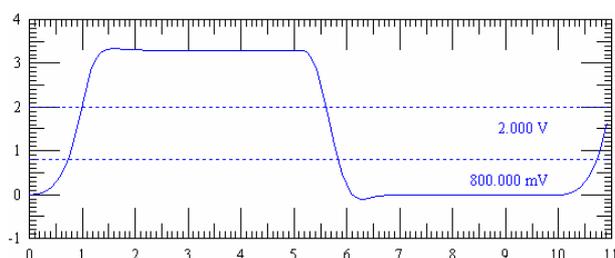
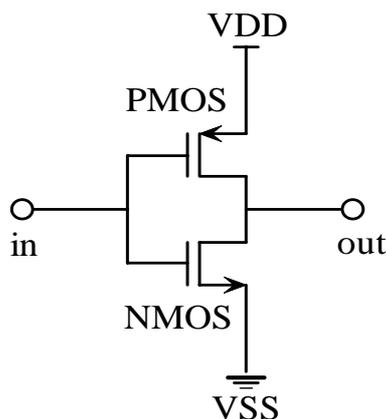
```



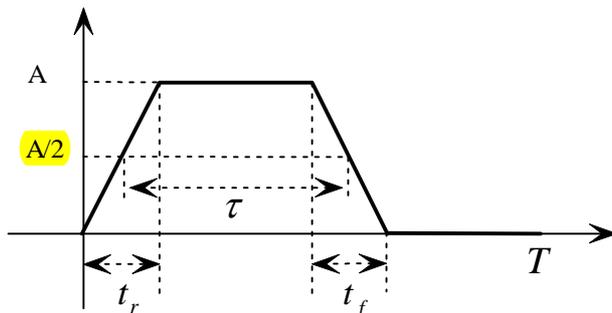
2.7 梯形波的频谱特征

2.6 节我们只是粗略的验证了梯形波的频谱幅度比理想方波衰减更快，那么梯形波频谱幅度是如何变化的，有何特征，还需要更深入的研究，了解梯形波的频谱特征对确定梯形波信号带宽具有重要意义。

实际信号的上升时间不可能为 0。对于 CMOS 工艺的输出门，不论是 PMOS 还是 NMOS 管，其状态转换都需要一定的时间。一个典型的输出门示意图如图 2.7 所示。当 out 点由 0 状态转换到 1 状态过程中，NMOS 管截止而 PMOS 管导通，这一过程需要一定的时间。在过渡时间内，out 点的电压是逐渐上升的，这就使得输出波形具有一定的上升时间。同理，out 点由 1 状态转换到 0 状态也需要一定的时间。典型的输出波形如图 2.8 所示。



典型数字信号波形上升边是非线性的，直接研究这个波形的频谱有一定的困难，通常把这一波形用梯形波近似，以方便使用简单的数学进行处理。梯形波如图所示。图中 t_r 表示波形上升时间， t_f 表示波形下降时间， τ 为半幅度点出上升边与下降边之间的时间跨度，定义为脉冲宽度， T 为信号周期。



为方便分析，我们令 $t_r = t_f$ ，这样梯形波可用下面的简单数学表达式来表示：

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{t_r} t & [0, t_r) \\ A & [t_r, \tau) \\ \frac{\tau + t_r}{t_r} - \frac{A}{t_r} t & [\tau, t_r) \end{cases}$$

为求该波形的傅里叶系数，对该函数进行二阶求导

$$f''(t) = \frac{A}{t_r} \delta(t) - \frac{A}{t_r} \delta(t - t_r) - \frac{A}{t_r} \delta(t - \tau) + \frac{A}{t_r} \delta(t - (\tau + t_r))$$

二阶导数代表的函数的傅里叶系数为：

$$\begin{aligned}
 c_n^{(2)} &= \frac{1}{T} \frac{A}{t_r} - \frac{1}{T} \frac{A}{t_r} e^{-jn\omega_0 t_r} - \frac{1}{T} \frac{A}{t_r} e^{-jn\omega_0 \tau} + \frac{1}{T} \frac{A}{t_r} e^{-jn\omega_0(\tau+t_r)} \\
 &= \frac{1}{T} \frac{A}{t_r} (1 - e^{-jn\omega_0 t_r})(1 - e^{-jn\omega_0 \tau}) \\
 &= \frac{1}{T} \frac{A}{t_r} e^{-j\frac{n\omega_0(\tau+t_r)}{2}} \left(2j \sin \frac{n\omega_0 t_r}{2} \right) \left(2j \sin \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right) \\
 &= \frac{\tau}{T} A (jn\omega_0)^2 \left(\frac{\sin \frac{n\omega_0 t_r}{2}}{\frac{n\omega_0 t_r}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \right) e^{-j\frac{n\omega_0(\tau+t_r)}{2}}
 \end{aligned}$$

因此，梯形波的傅里叶系数为：

$$c_n = \frac{c_n^{(2)}}{(jn\omega_0)^2} = \frac{\tau}{T} A \left(\frac{\sin \frac{n\omega_0 t_r}{2}}{\frac{n\omega_0 t_r}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \right) e^{-j\frac{n\omega_0(\tau+t_r)}{2}}$$

这里利用了导数的傅里叶系数与原函数的傅里叶系数之间的关系以及冲击序列的傅里叶系数等知识，读者可查阅“信号与系统”等相关书籍。

从系数表达式可得到频谱幅度包络，记为 $E(f)$ ，有：

$$E(f) = |c_n| = \frac{\tau}{T} A \left| \frac{\sin \frac{n\omega_0 t_r}{2}}{\frac{n\omega_0 t_r}{2}} \right| \left| \frac{\sin \frac{n\omega_0 \tau}{2}}{\frac{n\omega_0 \tau}{2}} \right|$$

与分析方波信号的频谱特征类似，我们用对数来表示该包络的幅度

$$20 \log_{10} E(f) = 20 \log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right) + 20 \log_{10} \left| \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right| + 20 \log_{10} \left| \frac{\sin \pi f t_r}{\pi f t_r} \right|$$

该包络在三个频率范围内各自具有不同的变化趋势，分别讨论如下。

1) 当 $f \ll \frac{1}{\pi\tau}$ ，且 f 趋近于 0 时，

$$20 \log_{10} E(f) \approx 20 \log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right)$$

此时渐进线为 $y_1(f) = 20 \log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right)$ ，斜率为 0，是一条水平直线，这是梯形波频谱的第一条渐进线。

2) 当 $\frac{1}{\pi\tau} < f < \frac{1}{\pi t_r}$ 时

$$20 \log_{10} E(f) = 20 \log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right) + 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\pi f \tau} \right)$$

此时渐进线为一条斜率为 $-20\text{dB}/十倍频程$ 的直线，这是梯形波频谱的第二条渐进线，记为 $y_2(f)$ ，与第一条渐进线 $y_1(f)$ 的交点为 $f = \frac{1}{\pi\tau}$ 。

3) 当 $f \gg \frac{1}{\pi t_r}$ 时

$$20\log_{10} E(f) = 20\log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right) + 20\log_{10} \left(\frac{1}{\pi f \tau} \right) + 20\log_{10} \left(\frac{1}{\pi f t_r} \right)$$

$$= 20\log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right) + 20\log_{10} \left(\frac{1}{\pi^2 f^2 \tau t_r} \right)$$

在此频率范围内，10 倍频程包络幅度变化量为

$$\left[20\log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right) + 20\log_{10} \left(\frac{1}{\pi^2 (10f)^2 \tau t_r} \right) \right] - \left[20\log_{10} \left(\frac{\tau}{T} A \right) + 20\log_{10} \left(\frac{1}{\pi^2 f^2 \tau t_r} \right) \right]$$

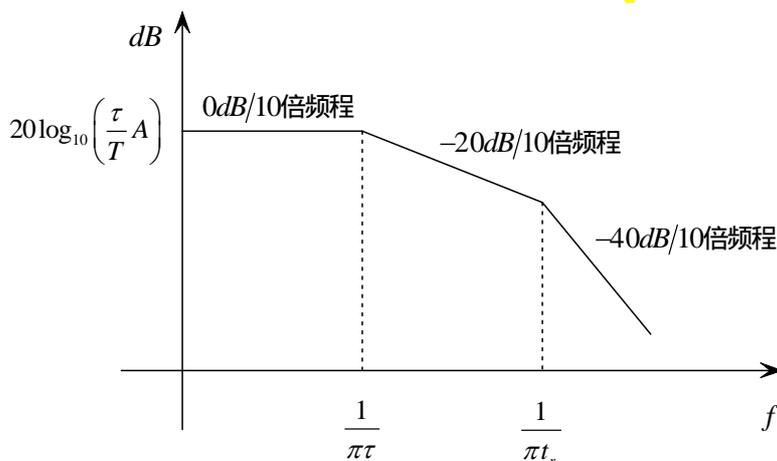
$$= 20\log_{10} \left(\frac{\pi^2 f^2 \tau t_r}{\pi^2 (10f)^2 \tau t_r} \right)$$

$$= -40dB$$

因此当频率 $f \gg \frac{1}{\pi t_r}$ 时，梯形波频谱幅度包络存在一条斜率为 $-40dB/十倍频程$ 的渐近线，

记为 $y_3(f)$ ，与第二条渐近线 $y_2(f)$ 的交点横坐标为 $f = \frac{1}{\pi t_r}$ 。

至此，我们得到了梯形波频谱包络的特征。与理想方波不同的是，梯形波频谱包络存在 3 条渐近线（理想方波为 2 条），斜率分别为 $0dB/十倍频程$ 、 $-20dB/十倍频程$ 、 $-40dB/十倍频程$ ，渐近线交点横坐标分别为 $f = \frac{1}{\pi \tau}$ 和 $f = \frac{1}{\pi t_r}$ ，如图所示。



下面的 Matlab 代码用于仿真周期性梯形波的离散谱及其渐近线情况，程序中假定梯形波的占空比 $\frac{\tau}{T}$ 为 50%，幅度 $A = 1$ ，上升及下降时间均为 $T_r = 1ns$ ，基波频率为 $10MHz$ 。

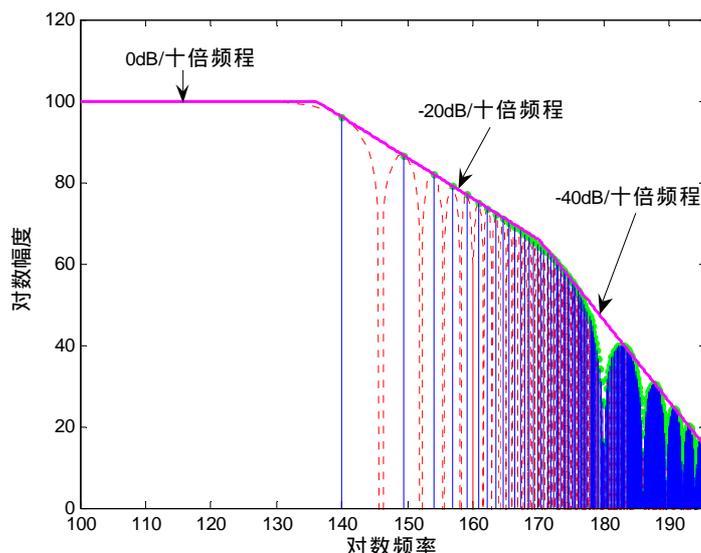
仿真结果如图所示。三条渐近线与频谱包络准确相切，与理论分析完全吻合。

```
% ===== %
% 梯形波信号的频谱及其渐近线
% ===== %
clc; clear all; pack;
f0 = 10e6; % 10 MHz
T = 1/f0; % 周期
D = 0.50; % 占空比
```

```

tol = D*T; % 脉宽
A = 1; % 幅度
Tr = 1e-9; % 上升时间1ns
N = 600;
% ===== 频谱包络 ===== %
f = (0.1:0.1:N)/T;
S_temp = 2*(A*tol/T)*abs(sin(pi*f*tol)./(pi*f*tol)).*abs(sin(pi*f*Tr)./(pi*f*Tr));
fx = [0,f];
S_env = [2*(A*tol/T),S_temp];
% ===== 离散谱线 ===== %
n = 1:1:N;
temp_discrete =
2*(A*tol/T)*abs(sin(n*pi*f0*tol)./(n*pi*f0*tol)).*abs(sin(n*pi*f0*Tr)./(n*pi*f0*Tr)
);
x = [0,n]/T;
val_discrete = [A*tol/T, temp_discrete];
% ===== 对数坐标 ===== %
f_db = [0,20*log10((0.1:0.1:N)/T)];
dB_S_env = [20*log10(2*A*tol/T),20*log10(S_temp)];
x_db = 20*log10((1:2:N)/T);
dB_val_discrete = 20*log10(val_discrete(2:2:end));
% ===== 产生渐进线 ===== %
f1 = linspace(0.01,1/(pi*tol),1000);
y1 = 20*log10(2*A*tol/T).*ones(size(f1));
f2 = linspace(1/(pi*tol),1/(pi*Tr),1000);
y2 = 20*log10(2*A*tol/T) + 20*log10(abs(1./(pi*f2*tol)));
f3 = linspace(1/(pi*Tr),N*f0,1000);
y3 = 20*log10(2*A*tol/T) + 20*log10(abs(1./(pi*f3*tol))) +
20*log10(abs(1./(pi*f3*Tr)));
% ===== 绘图显示吻合情况 ===== %
figure
plot(f_db,dB_S_env+100,'r:')
hold on
stem(x_db,dB_val_discrete+100,'MarkerEdgeColor','g','MarkerFaceColor','g',
'MarkerSize',2)
plot(20*log10(f1),100+y1,'m','LineWidth',2)
plot(20*log10(f2),100+y2,'m','LineWidth',2)
plot(20*log10(f3),100+y3,'m','LineWidth',2)
axis([100 max(f_db) 0 120])
xlabel('对数频率')
ylabel('对数幅度')

```

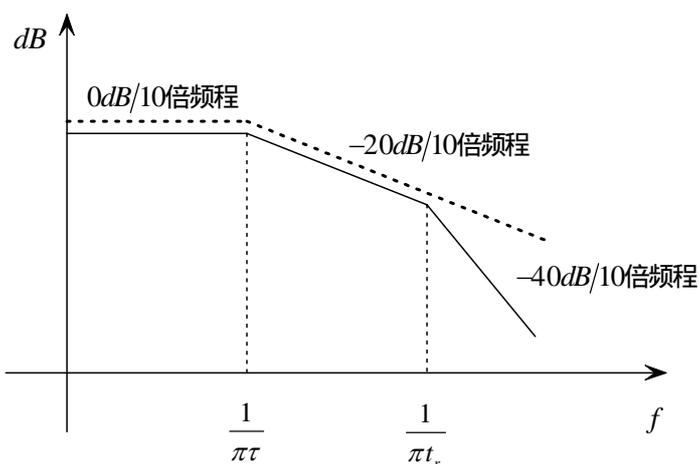


2.8 信号带宽 $0.35/T_r$ 是如何得到的

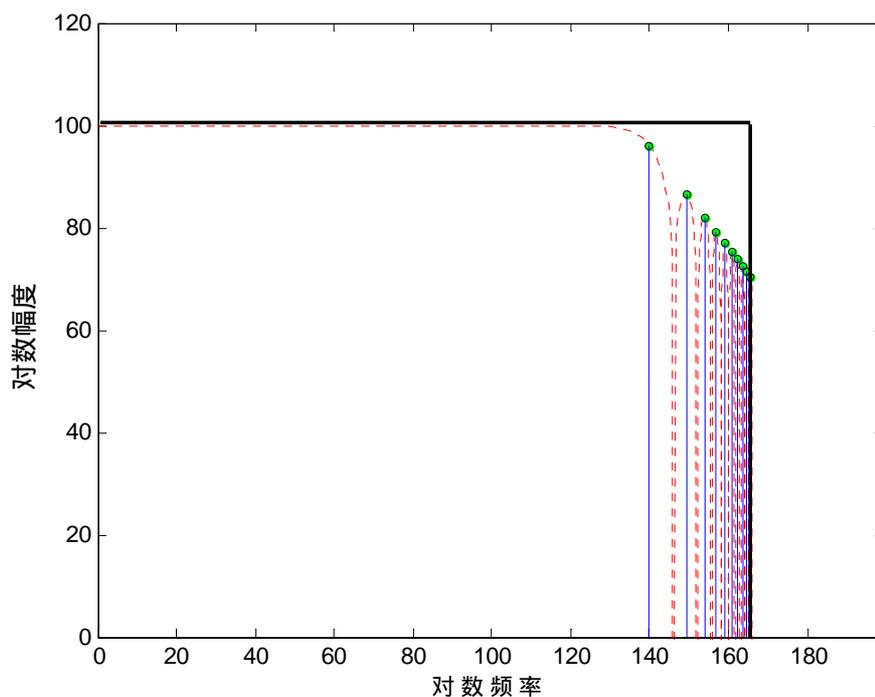
对于信号带宽的定义方式多种多样，常见的有 $\frac{0.35}{T_r}$ 、 $\frac{0.5}{T_r}$ 等，这是什么原因？各种定义方式代表的是什么意思？这几种定义方式是如何得到的？

对于工程应用来说，深入理解这一问题是非常重要的，因为这直接关系到设计中需要密切注意的频率范围有多大。“在感兴趣的频率范围内……”，我相信这样的字眼你一定不会陌生，在很多研究信号完整性的文献资料中都会提到这种说法。但是“感兴趣的频率范围”究竟该取多大，这常常让很多人感到迷惑！本节的目的就是带你从基础理论入手，抽丝剥茧，一步步探究 $\frac{0.35}{T_r}$ 这一定义背后的秘密。

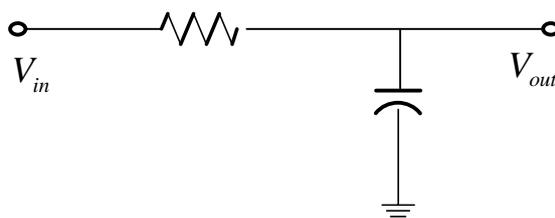
在 2.6 节我们看到了梯形波的高频成分衰减比方波快的多，而且我们也知道了上升时间越小，带宽越大。上升时间为 $1ns$ 的信号带宽一定小于上升时间为 $0.5ns$ 的信号带宽。方波信号可以看成是上升时间是 0 的信号，从上升时间的角度来说，这是最小值，是极限。因此方波信号可以作为带宽问题的参考波形，比较梯形波的频谱和方波的频谱会给我们很大的启示。图为方波和梯形波频谱包络渐近线的对比。图中虚线表示的是方波信号频谱包络的渐近线，实线表示的是梯形波频谱包络的渐近线。可以看到在 $f = \frac{1}{\pi t_r}$ 频率点之前，包络变化非常相似，而在该频率点之后，梯形波频谱开始表现为不同的特征，梯形波频谱包络开始以 $-40dB/十倍频程$ 的速度下降，远远高于方波信号频谱包络的下降速度。这个频率点与梯形波信号上升时间有关。因此我们可以合理的猜测，如果合成波形时所取得最高频率大于 $f = \frac{1}{\pi t_r}$ 点，即带宽大于 $\frac{1}{\pi t_r}$ ，那么合成的梯形波可能不会有太大的失真。剩下的问题是，最高频率应该取 $\frac{1}{\pi t_r}$ 后的那个频率值？注意 $\frac{1}{\pi T_r} = \frac{0.3183}{T_r}$ ， $\frac{0.35}{T_r}$ 仅比 $\frac{1}{\pi t_r}$ 高一点点，这个值是怎么得到的？



现在我们换一种思维方式，从另一个角度研究方波与梯形波的关系。2.6 节我们看到，在方波频谱中取一部分谐波频率来合成信号，其结果为时域波形的上升时间不为 0，类似于梯形波。值得注意的是：**只取一部分谐波分量这一过程相当于对方波信号进行滤波**，频域上相当于对频谱进行矩形加窗，如图所示。矩形窗之内所有频谱分量保持其原值，矩形窗之外的所有频率分量强制为 0。**频域上的窗函数实质是一个理想低通滤波器。**



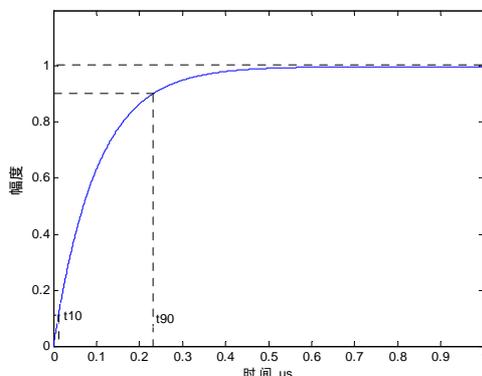
对方波信号进行滤波这一思维方式给了我们研究上升时间的重要手段，**只要建立起滤波器、方波频谱以及滤波后信号波形上升时间的关系**，就能得到信号上升时间与带宽的关系。最简单的方式是使用一个单极型低通滤波器，例如 RC 网络，如图所示。



如果 V_{in} 是一个 0V 到 1V 的阶跃信号，则 V_{out} 就是该滤波网络的阶跃响应。根据电路理论可知

$$V_{out} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}}$$

其中： $\tau_{RC} = RC$ 为该网络的时间常数。阶跃响应如图示。



定义 T_r 为信号幅度的 10% ~ 90% 所对应的时间跨度，即 10% ~ 90% 上升时间。则 T_r 可以通过如下方式计算得到：

$$0.9 = 1 - e^{-\frac{t_{90}}{\tau_{RC}}} \Rightarrow t_{90} = -\ln 0.1 \cdot \tau_{RC}$$

$$0.1 = 1 - e^{-\frac{t_{10}}{\tau_{RC}}} \Rightarrow t_{10} = -\ln 0.9 \cdot \tau_{RC}$$

进而得到 10% ~ 90% 上升时间与电路时间常数 τ_{RC} 的关系

$$T_r = t_{90} - t_{10} = \tau_{RC} \cdot \ln \frac{0.9}{0.1} = 2.1972 \tau_{RC}$$

接下来研究滤波器的频域特性，RC 网络的频域响应可表示为

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau_{RC}}$$

幅度为：

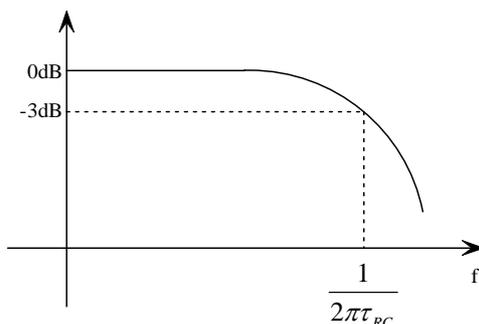
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau_{RC})^2}}$$

其频率响应如图示。在响应幅度的 -3dB 处， $|H(f)|$ 下降为最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，此时有

$$2\pi f\tau_{RC} = 1$$

即

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi\tau_{RC}}$$



将式 () 代入到式 () 中可得

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau_{RC}} = \frac{1}{2\pi} \frac{2.1972}{T_r} = \frac{0.35}{T_r}$$

原来如此， $\frac{0.35}{T_r}$ 实质上是单极型低通滤波网络的 3dB 带宽。至此，我们终于弄清了

$\frac{0.35}{T_r}$ 这种带宽定义方式的真实含义。需要特别说明的是，这种带宽定义方式中， T_r 指的是 10% ~ 90% 信号上升时间。

2.9 信号带宽 $0.5/T_r$ 指的是什么

我们已经知道了带宽定义 $\frac{0.35}{T_r}$ 实质上是单极型低通滤波网络的 3dB 带宽。除了这种定义方式外，常用的还有一种定义方式即 $\frac{0.5}{T_r}$ ，那么这种定义方式代表的是什么含义？

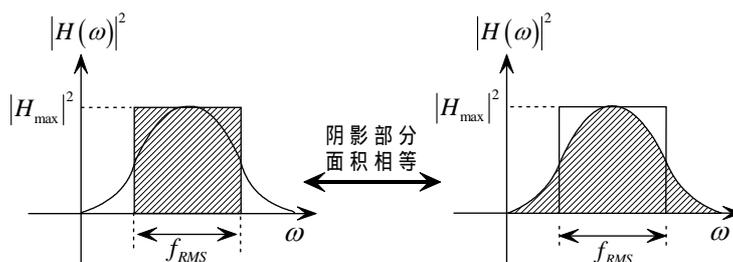
首先必须清楚，系统带宽的定义中除了 3dB 带宽外，还有一种常用的定义方式，即等效噪声带宽或称为均方差带宽，记为 f_{RMS} 。如果给定系统的频域传输函数为 $H(\omega)$ ，则等效噪声带宽 f_{RMS} 可表示为

$$f_{RMS} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{H(\omega)}{H_{\max}} \right|^2 d\omega$$

其中 H_{\max} 为 $H(\omega)$ 的最大值。为了弄清楚 f_{RMS} 的含义，将定义变形

$$2\pi f_{RMS} |H_{\max}|^2 = \int_0^\infty |H(\omega)|^2 d\omega$$

式 () 清楚的说明等效噪声带宽 f_{RMS} 是这样一种频带宽度：如果频谱在该带宽定义的频率范围内幅值不变，保持为频域传输函数为 $H(\omega)$ 的最大值 H_{\max} ，则该频带内 $|H_{\max}|^2$ 下所覆盖的矩形面积等于 $|H(\omega)|^2$ 在整个频率范围内覆盖的面积，图直观的说明了这种关系。



对于单极型低通滤波网络，3dB 带宽 f_{3dB} 等效噪声带宽 f_{RMS} 之间有着确定的关系。下面我们通过简单的数学找出这种关系。将单极型 RC 滤波网络的传输函数写成如下形式：

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{3dB}}}$$

则

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^2}} = \frac{\omega_{3dB}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_{3dB}^2}}$$

且有 $H_{max} = 1$ ，将式 () 代入式 () 中得

$$\begin{aligned} f_{RMS} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega_{3dB}^2}{\omega^2 + \omega_{3dB}^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \omega_{3dB}^2 \frac{1}{\omega_{3dB}} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}} \right) \Bigg|_0^{\infty} \\ &= \frac{\omega_{3dB}}{2\pi} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} f_{3dB} \end{aligned}$$

这样就可以把等效噪声带宽 f_{RMS} 与上升时间联系起来

$$f_{RMS} = \frac{\pi}{2} f_{3dB} = \frac{\pi}{2} \frac{0.35}{T_r} = \frac{0.55}{T_r}$$

可见信号带宽的定义 $\frac{0.5}{T_r}$ 与单极型低通滤波网络的等效噪声带宽 f_{RMS} 非常接近。实际上

$\frac{0.5}{T_r}$ 的带宽就是等效噪声带宽 f_{RMS} ，只不过这种定义方式是考虑多种滤波网络的等效噪声带宽后给出的一个折中结果，这将在下一节中详细说明。

2.10 关于信号带宽的补充说明

第 2.8 节和第 2.9 节以单极型低通滤波网络为参考，分别定义了 3dB 带宽 f_{3dB} 等效噪声带宽 f_{RMS} 。单极型低通滤波网络只是滤波器的一个特例。在输出电平转换过程中，影响信号上升时间的因素是复杂的，如果将影响上升时间的所有因素看成是一个滤波器，那么该滤波器的阶跃响应未必是单极型网络的指数变化形式。复杂系统的响应常常是高斯型的响应，其 3dB 带宽 f_{3dB} 等效噪声带宽 f_{RMS} 分别为：

$$f_{3dB} = \frac{0.338}{T_r}$$

$$f_{RMS} = \frac{0.36}{T_r}$$

这与单极型滤波器的带宽存在细微的差别。大体上来说，我们可以写出带宽与信号上升时间的一般形式表达式：

$$f_{3dB} = \frac{k_{3dB}}{T_r}$$

$$f_{RMS} = \frac{k_{RMS}}{T_r}$$

常数 k_{3dB} 与滤波器的响应波形有关，其变化范围在 0.338 ~ 0.35 之间。 k_{RMS} 同样与滤波器的响应波形有关，其变化范围在 0.36 ~ 0.55 之间。由此可见，可以定义出很多种不同形式的带宽表达式。假设信号的上升时间为 $T_r = 1ns$ ，根据不同的带宽表达式可以求出其带宽可以是 338MHz ~ 550MHz 之间的任意一个值。这就引出一个问题，我们该使用哪一个带宽数值？

理解这一问题最直接的办法就是弄清楚定义数字信号带宽的目的是什么。我们为什么要定义这一带宽？实际中的高速数字电路是非常复杂的，板级互连中的寄生电容、寄生电感、材料特性、连线长度、互连线拓扑、横截面结构、输出门特性、输入门特性、临近线的影响、地平面的腔体结构等等这一系列繁杂的因素与信号中的各种频率成分相互作用，从而产生各种信号完整性问题。研究信号完整性问题是为了更好的、稳健的、可靠的实现电路功能以及在电路出现问题时能准确定位问题原因所在。应该注意这一要求本身就是一个模糊的概念。实际上不可能给出一个唯一的且确定的衡量带宽定义是否合理的标准。我们所能做的只是在一定程度上消除可能出现的问题，或者将设计的危险减小到某种可接受的程度。因此我们并不需要一个非常精确的带宽定义，更实际的做法是定义一种易于使用的、便于理解的带宽表示方式。定义这样一种带宽，只是给我们提供了这样一种参考标准：在该频率范围内的频率成分很可能对最终的设计产生大的影响，因此必须认真考虑。稍高于这一频率点的频率成分，对设计可能会产生影响也可能不会。远高于这一频率点的频率成分不会对设计产生影响，可以安全的忽略掉。因此带宽的定义只是将信号中的频率成分分成“完全无关紧要的、仅仅令人不安的、完全破坏性的”等几个级别。实际上信号带宽的这种定义方式只是给我们提供了一个模糊的界限。其最大的优点在于它在时间和频率之间建立了一种直接的联系，为设计提供一种方便易用的工具。

正是因为带宽定义的这种模糊性，在研究信号完整性的文献资料中才会出现多种定义方式，当然最常用的有两种：

使用 3dB 带宽

$$BW = f_{3dB} = \frac{0.35}{T_r}$$

使用等效噪声带宽

$$BW = f_{RMS} = \frac{0.5}{T_r}$$

这两种方式都可以使用，使用等效噪声带宽时对设计要求更严格一些。

本章要点