第一章 习题解答（供参考）

1．4 判定下列信号是否为周期信号。若是周期信号，则确定信号周期 T。

（2）$f_2(t)=4\sin 2t+5\cos \pi t$；

（4）$f_4(t)=A\sin\left(\frac{3t}{2}\right)+B\cos\left(\frac{16t}{15}\right)+C\sin\left(\frac{t}{29}\right)$；

（6）$f_6(t)=e^{j(\pi t-1)}$；

（7）$f_7(k)=\cos\left(\frac{8}{7}k\pi\right)$；

解：

如果两个周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的周期具有公倍数，则它们的和信号

$$y(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

仍然是一个周期信号，其基本周期是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 周期的最小公倍数。

（2） $\sin 2t$ 和 $\cos \pi t$ 的周期分别是：$T_1=\pi$（s） $T_2=2$（s）

由于 T_1 是无理数，T_1 与 T_2 间不存在公倍数，故 $f_2(t)$ 是非周期信号。

（4）$\sin\left(\frac{3t}{2}\right),\cos\left(\frac{16t}{15}\right),\sin\left(\frac{t}{29}\right)$ 的周期分别为：$T_1=\frac{4\pi}{3},T_2=\frac{15\pi}{8},T_3=58\pi$，它们的最小公倍数为 1740π，所以 $f_4(t)$ 的周期为 1740π。

（6）因 $y_3(t)=e^{j(\pi t-1)}=\cos(\pi t-1)+j\sin(\pi t-1)$，其实部和虚部均为周期信号，且具有相同周期，故 $y_3(t)$ 是周期信号，其周期 $T=2\pi/|\omega_0|=2\pi/\pi=2$ s。

（7）

按定义，周期序列 $y(k)$ 满足 $y(k)=y(k+N)$，其中满足定义式的最小正整数 N 称为序列 $y(k)$ 的周期。

所以，$\cos(8k\pi/7)=\cos\left[\frac{8\pi}{7}(k+N)\right]$，即 $\frac{8\pi}{7}N=2\pi n$，则有：$N=\frac{7}{4}n=7(\text{取}n=4)$

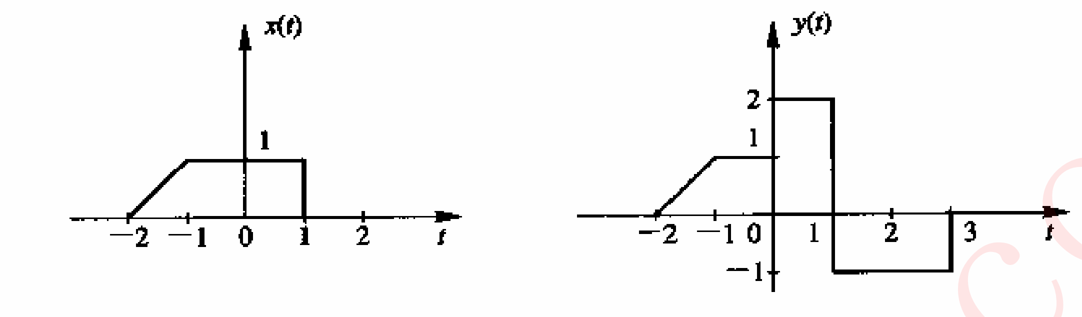
1．5 已知连续时间信号 x(t) 和 y(t) 分别如题图 1．2(a)、(b) 所示，试画出下列各信号的波形图：

(1) $x(t-2)$;

(4) $x(2t+2)$;

(10) $x(t)-y(t)$;

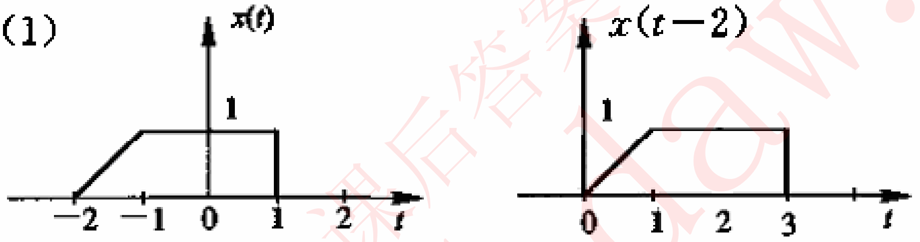
(12) $x(2t)\cdot y(t)\varepsilon(t)$。



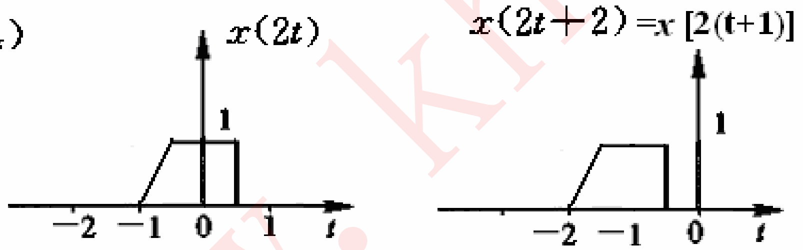
(a) (b)

解:

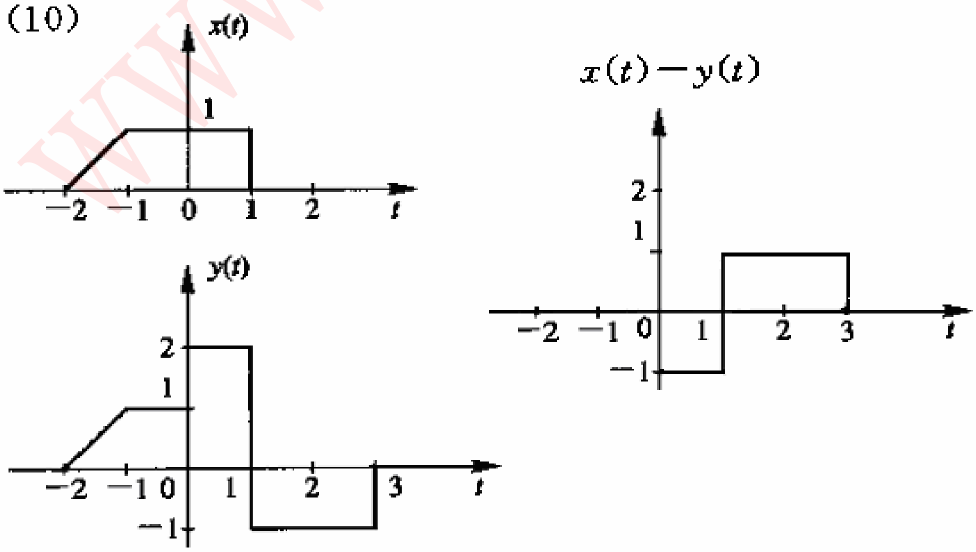
(1)

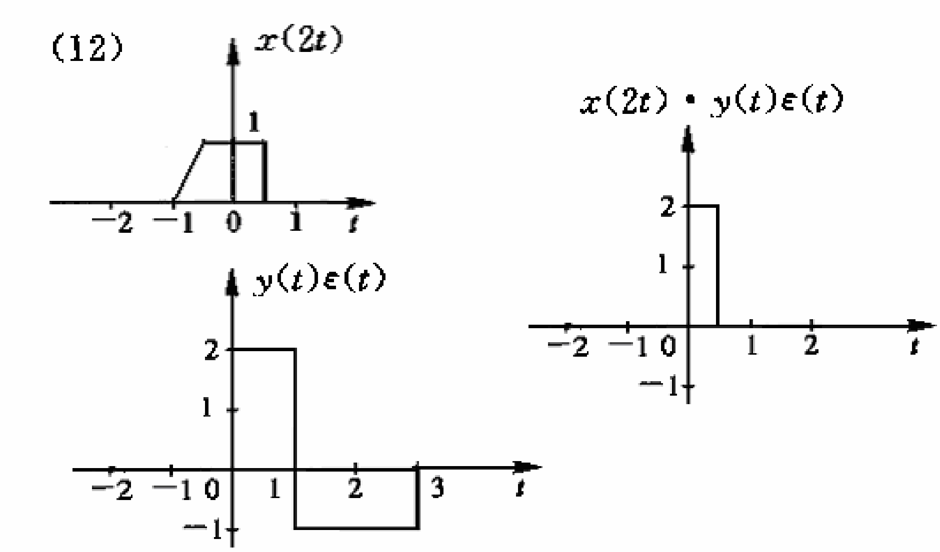


(4)



(10)

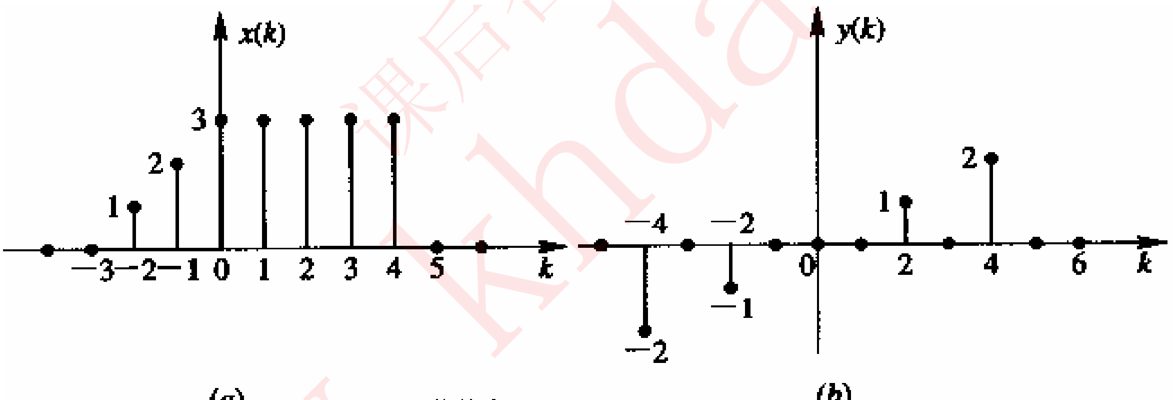




1．6　已知离散时间信号 x(k) 和 y(k) 分别如题图 1．3(a)、(b) 所示，试画出下列序列的图形：

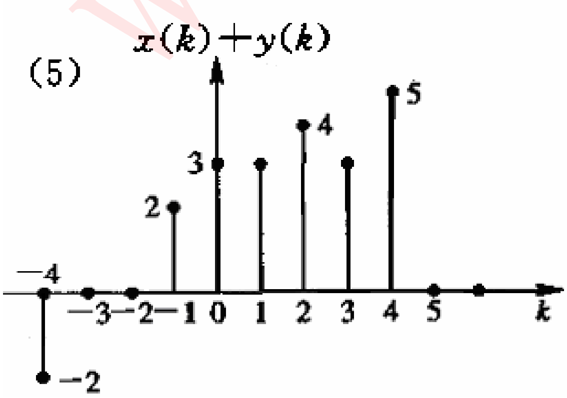
(5) $x(k)+y(k)$；

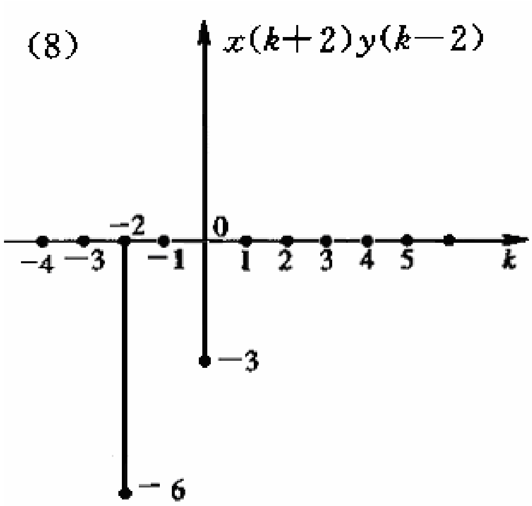
(8) $x(k+2)y(k-2)$。



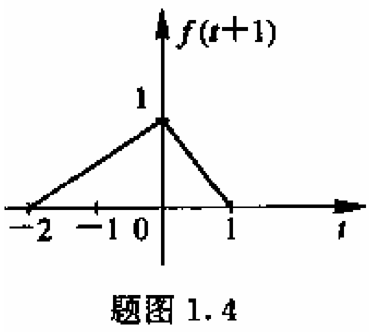
题图 1.3

解：



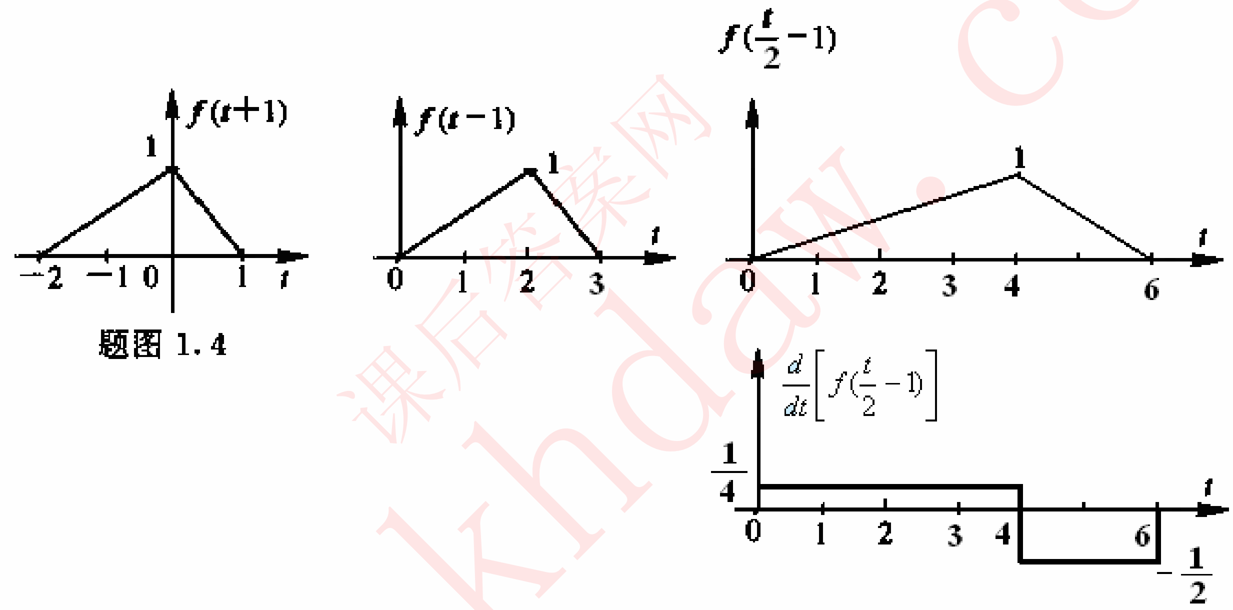


1．8　已知信号 f(t+1)的波形如题图 1．4 所示，试画出 $\frac{d}{dt}\left[f(\frac{t}{2}-1)\right]$ 的波形。

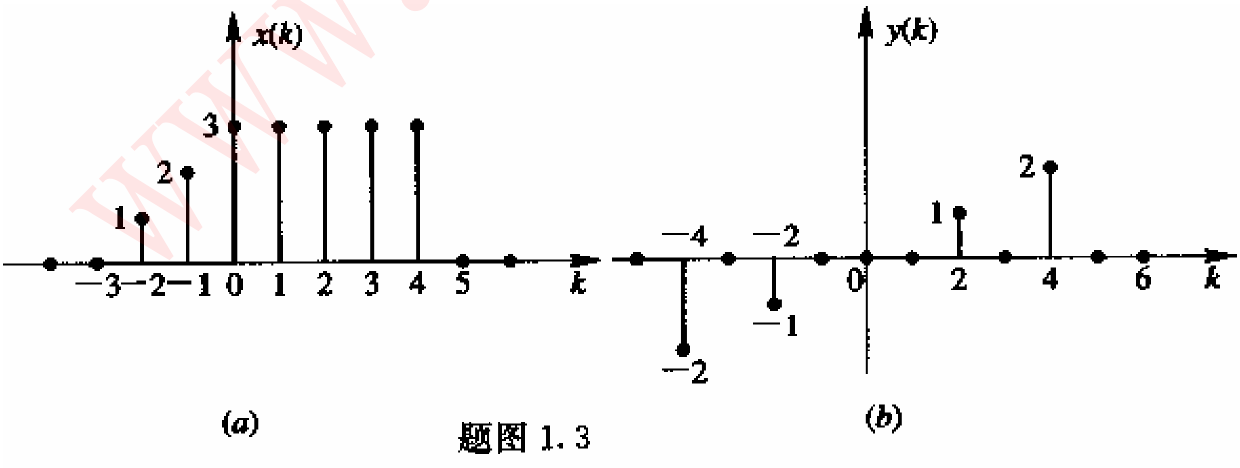


题图 1.4

解：

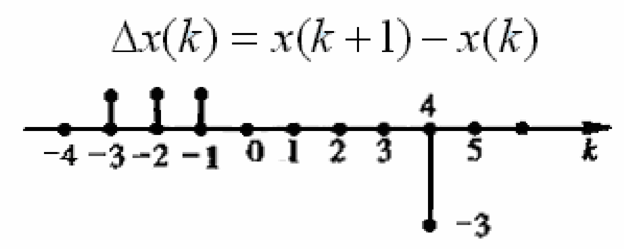


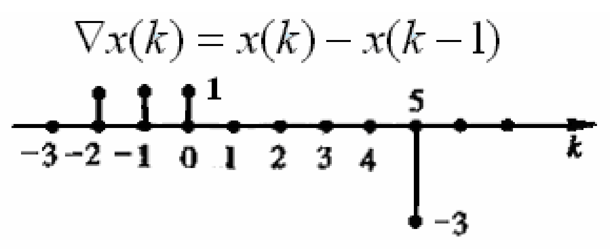
1．9　分别计算题图 1．3 中信号 x(k)和 y(k)的一阶前向差分、一阶后向差分和迭分。

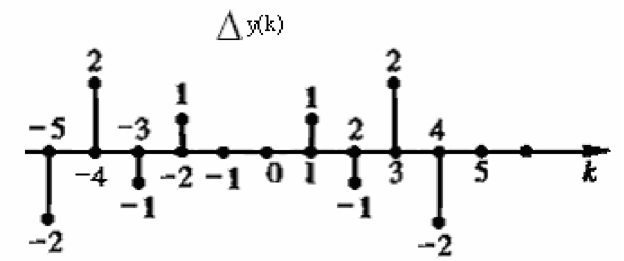


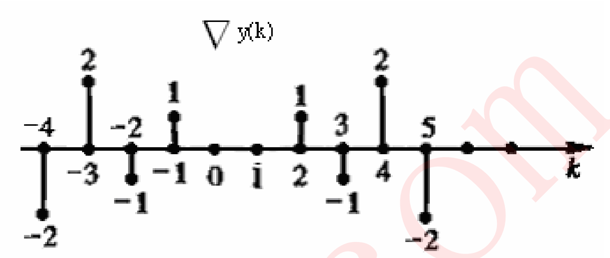
题图 1.3

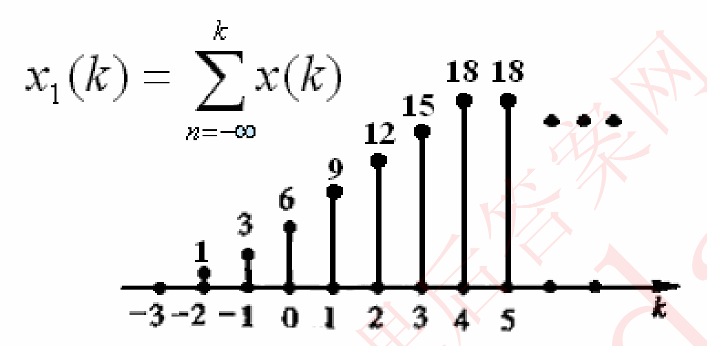
解：$\Delta x(k)=x(k+1)-x(k)$　　$\nabla x(k)=x(k)-x(k-1)$，迭分：$x_1(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}x(k)$

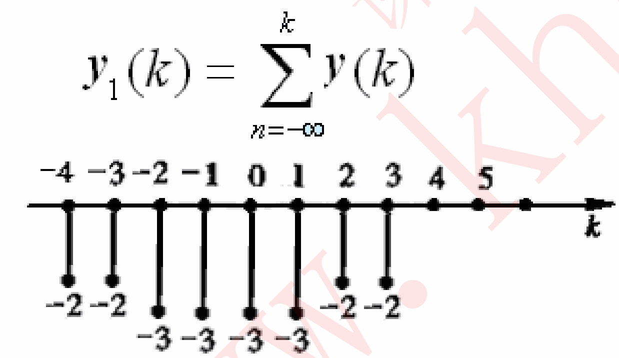












1．11　计算下列各题。

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}\varepsilon(t)]$；

(4) $\int_{-\infty}^{t} e^{-x}[\delta(x)+\delta'(x)]\,\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-5}^{5}(2t^2+t-5)\delta(3-t)\,\mathrm{d}t$；

(6) $\int_{-1}^{5}(t^2+t-\sin\frac{\pi}{4}t)\delta(t+2)\,\mathrm{d}t$；

(8) $\int_0^{10}\delta(t^2-4)\,dt$；　　(10) $\int_{-\infty}^{t}(t^2+t+1)\delta\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$。

解：

（2） $原式=e^{-t}\delta(t)-e^{-t}\varepsilon(t)=\delta(t)-e^{-t}\varepsilon(t)$

（4）因为

$$e^{-t}[\delta(t)+\delta'(t)]=\delta(t)+\delta'(t)-(-e^{-t})|_{t=0}\delta(t)$$
$$=2\delta(t)+\delta'(t)$$

所以 $原式=\int_{-\infty}^{t}[2\delta(x)+\delta'(x)]\,dx=2\varepsilon(t)+\delta(t)$

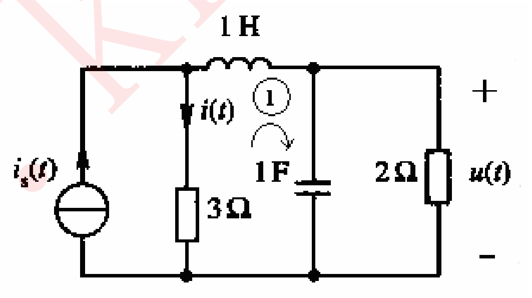
（5）原式 $=\int_{-5}^{5}(2t^2+t-5)|_{t=3}\ \delta(3-t)dt=(2\times3^2+3-5)\int_{-5}^{5}\ \delta(3-t)dt=18$

（6）因为冲激点不在积分限内，所以原式 $=0$。

（8）原式 $=\int_0^{10}\delta(t^2-4)dt=\frac{1}{4}\int_0^{10}[\delta(t-2)+\delta(t+2)]dt=\frac{1}{4}$

（10）原式 $=\int_{-\infty}^{t}(t^2+t+1)\delta(\frac{t}{2})dt=\int_{-\infty}^{t}(t^2+t+1)2\delta(t)dt=2\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=2\varepsilon(t)$

1．12　如题图 1．5 所示电路，输入为 is(t)，分别写出，以 i(t)、u(t) 为输出时电路的输入输出方程。



题图 1.5

解：

（1） $i_s(t)=i(t)+i_c(t)+i_R(t)=i(t)+Cu_c'(t)+\frac{1}{2}u(t)$ ----(1)

而 $u_C(t)=u(t)$

对回路①，有： $\begin{cases}-3i(t)+Li_L'(t)+u(t)=0\\ i_L(t)=i_s(t)-i(t)\end{cases}\Rightarrow u(t)=3i(t)-Li_s'(t)+Li'(t)$ ----(2)

(1)、(2)式联合求解得：

$$i_s(t)=i(t)+[3i(t)-i_s'(t)+i'(t)]'+\frac{3}{2}i(t)-\frac{1}{2}i_s'(t)+\frac{1}{2}i'(t)$$
$$\Rightarrow 2i''(t)+7i'(t)+5i(t)=2i_s''(t)+i_s'(t)+2i_s(t)$$

（2）$i_s(t)=\frac{1}{3}u_R(t)+Cu_c'(t)+\frac{1}{2}u(t)$ ----(1)

对回路①，有：$\begin{cases}-u_R(t)+Li_L'(t)+u(t)=0\\ i_L(t)=Cu_C'(t)+\frac{1}{2}u(t)\end{cases}\Rightarrow u_R(t)=u''(t)+\frac{1}{2}u'(t)+u(t)$ ----(2)

(1)、(2)式联合求解得：

$$i_s(t)=\frac{1}{3}u''(t)+\frac{1}{6}u'(t)+\frac{1}{3}u(t)+u'(t)+\frac{1}{2}u(t)$$
$$\Rightarrow 2u''(t)+7u'(t)+5u(t)=6i_s(t)$$

1．15 某经济开发区计划每年投入一定资金，设这批资金在投入后第二年度的利润回报率为 α%，第三年度开始年度利润回报率稳定在 β%。试建立预测若干年后该经济开发区拥有的资金总额的数学模型。

解： 设第 k 年度的资金总额为 y(k)

则 y(k) 由三部分组成：

当年投入 f(k) 、去年的资金总额 y(k-1) 、利润.

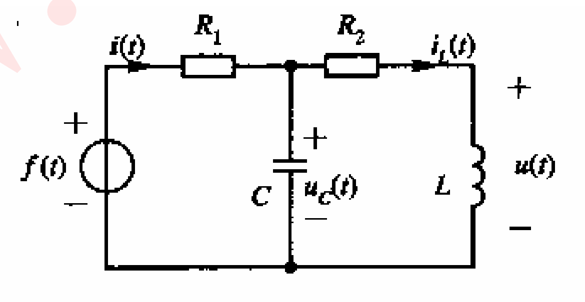
其中利润为： α%[y(k-1) – y(k-2)]+ β% y(k-2)

所以拥有资金总额的数学模型为：

y(k)= f(k) + y(k-1) + α%[y(k-1) – y(k-2)]+ β% y(k-2)

经整理： y(k) -(1 + α%) y(k-1) – (β%- α%) y(k-2) = f(k)

1．16 写出题图 1．7 所示电路的状态空间方程。(以 i_L、u_c 为状态变量，i 和 u 为输出)



题图 1.7

解：

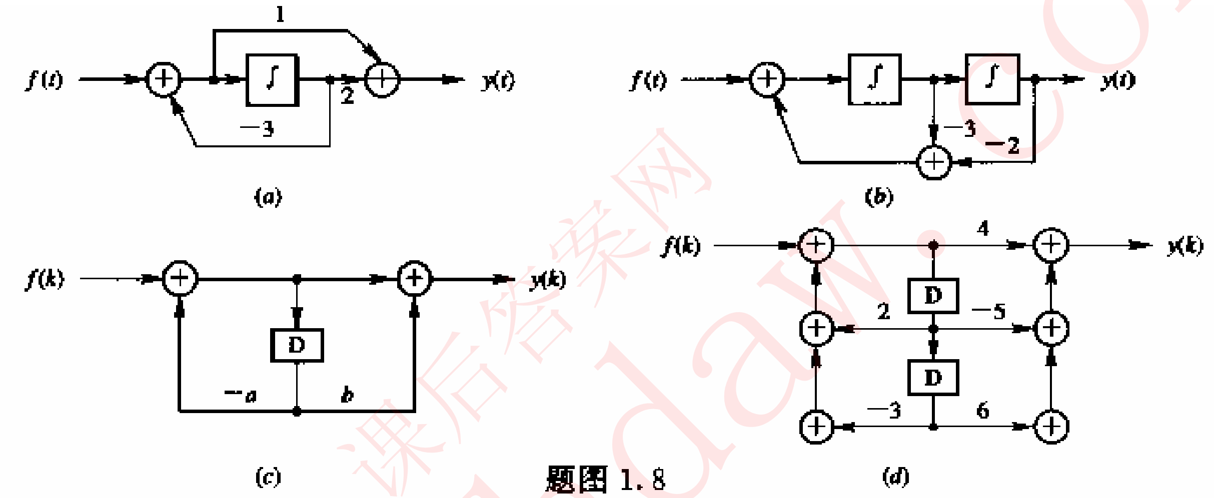
$$i_C(t)=Cu_c'(t)=i(t)-i_L(t)=i(t)-\frac{u_c(t)-u(t)}{R_2}$$

$$u(t)=Li_L'(t)$$

由电路：输出方程为：
$$\begin{cases} u(t) = u_C(t) - i_L(t)R_2 \\ i(t) = \dfrac{f(t) - u_C(t)}{R_1} \end{cases}$$

状态方程为：
$$\begin{cases} \dot{u}_C(t) = \dfrac{f(t)}{R_1C} - \dfrac{u_C(t)}{R_1C} - \dfrac{i_L(t)}{C} \\ \dot{i}_L(t) = \dfrac{u_C(t) - R_2 i_L(t)}{L} \end{cases}$$

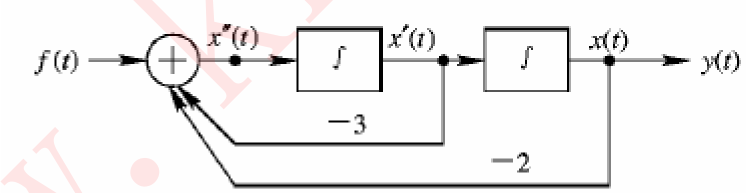
1．17　写出题图 1．8 系统的输入输出方程。



题图 1.8

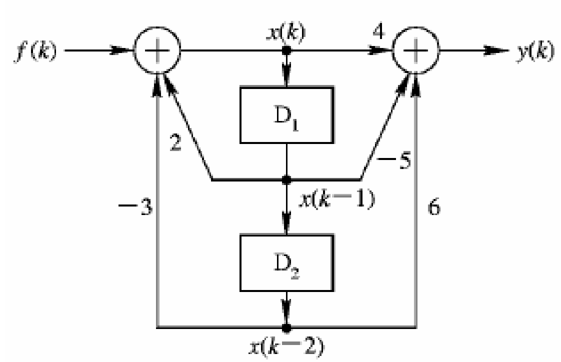
解：

（b）系统框图等价为：



因此：$\begin{cases} x''(t) = f(t) - 3x'(t) - 2y(t) \\ x'(t) = y'(t) \\ x''(t) = y''(t) \end{cases}$　　即：$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$

（d）系统框图等价为：



系统框图表示二阶离散系统，相应的输入输出方程是二阶差分方程。离散系统输入输出方程列写方法与连续系统相仿，先设图中移位器 D_1 的输入信号为 $x(k)$，则 D_1、D_2 的输出信号分别为 $x(k-1)$ 和 $x(k-2)$。写出两个加法器的输出信号：

$$x(k) = f(k) + 2x(k-1) - 3x(k-2)$$
$$y(k) = 4x(k) - 5x(k-1) + 6x(k-2)$$

经移位，得：

$$\left.\begin{aligned} y(k-1) &= 4x(k-1) - 5x(k-2) + 6x(k-3) \\ y(k-2) &= 4x(k-2) - 5x(k-3) + 6x(k-4) \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} x(k-1) &= f(k-1) + 2x(k-2) - 3x(k-3) \\ x(k-2) &= f(k-2) + 2x(k-3) - 3x(k-4) \end{aligned}\right\}$$

可求得

$$\begin{aligned} y(k) =& 4[f(k) + 2x(k-1) - 3x(k-2)] \\ & -5[f(k-1) + 2x(k-2) - 3x(k-3)] \\ & +6[f(k-2) + 2x(k-3) - 3x(k-4)] \\ =& 4f(k) - 5f(k-1) + 6f(k-2) \\ & +8x(k-1) - 22x(k-2) \\ & +27x(k-3) - 18x(k-4) \\ =& 4f(k) - 5f(k-1) + 6f(k-2) \\ & +2[4x(k-1) - 5x(k-2) + 6x(k-3)] \\ & -3[4x(k-2) - 5x(k-3) + 6x(k-4)] \\ =& 4f(k) - 5f(k-1) + 6f(k-2) \\ & +2y(k-1) - 3y(k-2) \end{aligned}$$

最后，写出系统输入输出方程为

$$y(k) - 2y(k-1) + 3y(k-2) = 4f(k) - 5f(k-1) + 6f(k-2)$$

这是二阶线性常系数差分方程。

1．19 设系统的初始状态为 x1(•)和 x2(•)，输入为 y(•)，完全响应为 y(•)，试判断下列系统的性质(线性 / 非线性，时变 / 时不变，因果 / 非因果，稳定 / 不稳定)。

(1) $y(t) = x_1(0) + 2x_2(0) - 3f(t)$；

(2) $y(t) = x_1(0)x_2(0) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau$；

(3) $y(t) = x_1(0) + \sin[f(t)] + f(t-1)$；

(4) $y(t) = x_2(0) + f(2t) + f(t+1)$；

(5) $y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k x_1(0) + (k-1)f(k+2)$。

解：

线性/非线性系统

因系统(1)、(4)、(5)分别满足完全响应的可分解性、零输入线性和零状态线性条件，故均为线性系统。但是，系统(2)不满足零输入线性条件，系统(3)不满足零状态线性条件，故这两个系统是非线性系统。

时变/时不变系统

对于系统(1)、(2)、(3)而言，由于初始状态保持不变，$y_f(t) \sim f(t)$关系满足时不变特性，故均为时不变系统。

当系统具有波形展缩变换作用时，由于激励的任一时移，经系统展缩运算后，都将破坏系统的时不变性，故这类系统均为时变系统。对于系统(4)，由于

$$f(t) \longrightarrow y_f(t) = f(2t) + f(t+1)$$

$$\begin{aligned} f_1(t) = f(t-t_0) \longrightarrow y_{f1}(t) &= f_1(2t) + f_1(t+1) \\ &= f(2t-t_0) + f(t+1-t_0) \\ &\neq y_f(t-t_0) \end{aligned}$$

因此，系统(4)是时变系统。

对于系统(5)，因系统输入输出方程是变系数差分方程，故该系统也是时变系统。

因果/非因果系统

因系统(1)、(2)、(3)在任一时刻$t(\geqslant 0)$的响应均与该时刻以后的激励无关，故这三个系统都是因果系统。与此不同，系统(4)中$t(\geqslant 0)$时刻的响应取决于$2t$及$t+1$时刻的激励，而系统(5)中k序号的响应取决于$k+2$序号的激励，故系统(4)、(5)是非因果系统。

稳定/不稳定系统：

系统（2）当 $f(t)=\varepsilon(t)$ （或 $f(t)=C$）时，$y_f(t) = t\,\varepsilon(t)$，当 $t\to\infty$， $y_f(t) \to\infty$

系统（5）当 $f(k)=\varepsilon(k)$ 时，若 $k\to\infty$， $y_f(k) \to \infty$

所以有：

(1) 线性、时不变、因果、稳定
(2) 非线性、时不变、因果、不稳定
(3) 非线性、时不变、因果、稳定
(4) 线性、时变、非因果、稳定
(5)线性、时变、非因果、不稳定

1．21　设某线性系统的初始状态为 x1(0-)、x2(0-)，输入为 f(t) 全响应为 y(t)，且已知；

(1)当 $f(t)=0$，$x1(0-)=1$，$x2(0-)=0$ 时，有 $y(t)=2e^{-t}+3e^{-3t}$，$t\geq 0$

(2)当 $f(t)=0$，$x1(0-)=0$，$x2(0-)=1$ 时，有 $y(t)=4e^{-t}-2e^{-3t}$，$t\geq 0$

试求当 $f(t)=0$，$x1(0-)=5$，$x2(0-)=3$ 时的系统响应 y(t)。

解：

根据零输入线性：记，$x1(0-)=1$ 时，$y1(t)=2e^{-t}+3e^{-3t}$，$t\geq 0$

$x2(0-)=1$ 时，$y2(t)=4e^{-t}-2e^{-3t}$，$t\geq 0$

则 $x1(0-)=5$，$x2(0-)=3$ 时，系统的零输入响应：

$y_x(t)=y(t)=5y1(t)+3y2(t)=22e^{-t}+9e^{-3t}$，$t\geq 0$

1．22　在题 1.21 的基础上，若还已知 f(t)＝ε(t)，x1(0-)＝0，x2(0-)＝0 时，有 $y(t)=2+e^{-t}+2e^{-3t}$，t≥0

试求当 f(t)＝3ε(t)，x1(0-)＝2，x2(0-)＝5 时的系统响应 y(t)。

解：

记，f(t)＝ε(t)，x1(0-)＝0，x2(0-)＝0 时，系统响应 $y_f(t)=y(t)=2+e^{-t}+2e^{-3t}$，t≥0

则当 f(t)＝3ε(t)，x1(0-)＝2，x2(0-)＝5 时的系统全响应 y(t)为：

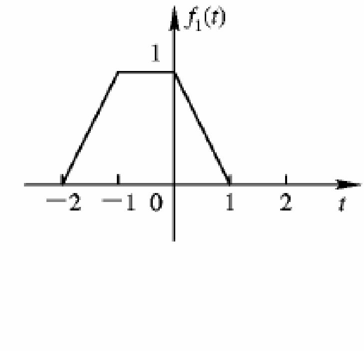
$y(t)=3y_f(t)+2y1(t)+5y2(t)$

$\quad =6+27e^{-t}+2e^{-3t}$，t≥0

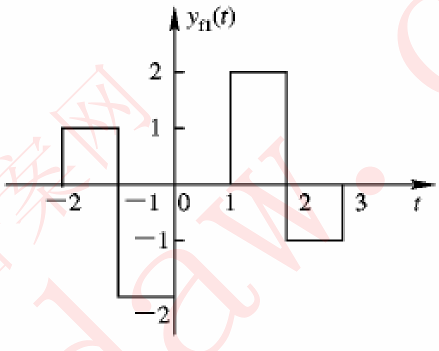
1．26　设有一线性时不变系统，当输入波形如图(a)所示时，系统的零状态响应 $y_f(t)$ 如图(b)所示。

(a)试画出输入为 2f(t+4)时，系统零状态响应 $y_f(t)$ 的波形；

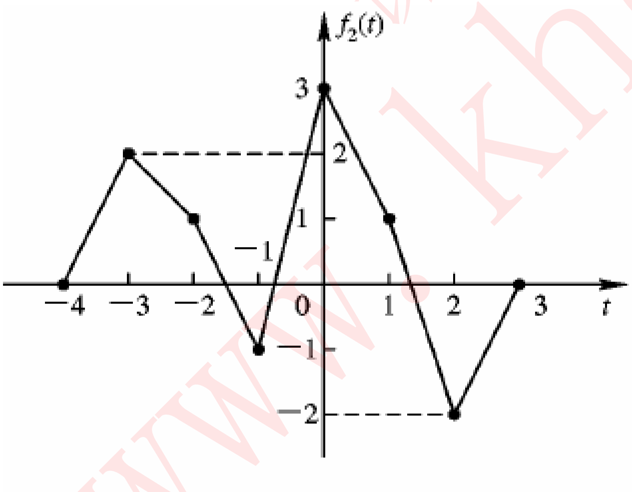
(b)画出输入波形如(c)时，系统零状态响应 $y_f(t)$ 的波形.



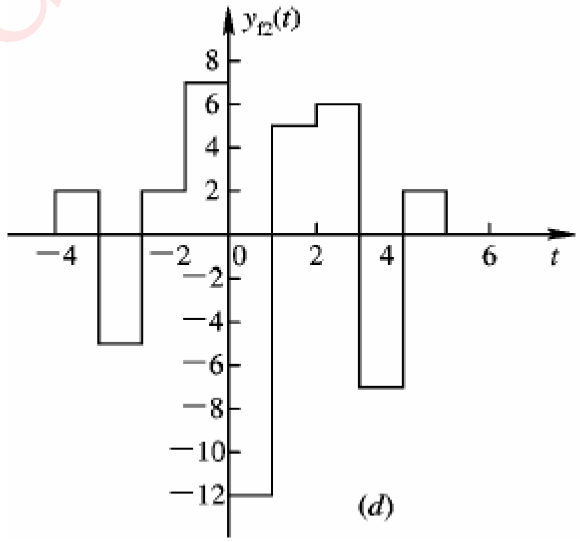
(a)



(b)



(c)



(d)

解：（b）

因 $f_2(t)$ 可以用 $f_1(t)$ 及其相应时移信号的线性组合表示为

$$f_2(t)=2f_1(t)-f_1(t-1)+3f_1(t-3)-2f_1(t-4)$$

故根据 LTI 系统特性，求得系统在 $f_2(t)$ 作用下的零状态响应

$$y_{f2}(t)=2y_{f1}(t)-y_{f1}(t-1)+3y_{f1}(t-3)-2y_{f1}(t-4)$$

画出波形如图(d)所示。

习题二

2.1 对下列信号，当 $\tau \to 0(\tau > 0)$ 时，$f(t) \to \delta(t)$，试确定系数值 K。

(2) $f(t) = Ke^{-|t|/\tau}$;

(4) $f(t) = K\int_{-1/\tau}^{1/\tau} e^{j\omega t} d\omega$ 。

解：（2） $\because \tau \to 0, f(t) \to \delta(t)$ $\quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2K\int_0^{\infty} e^{-t/\tau}dt = -2K\tau e^{-t/\tau}\Big|_0^{\infty} = 2K\tau = 1$

$\Rightarrow K = 1/2\tau$

（4） $f(t) = K\int_{-1/\tau}^{1/\tau} e^{j\omega t} d\omega = 2K\dfrac{\sin t/\tau}{t}$

$\because \tau \to 0, f(t) \to \delta(t)$ $\quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2K\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t/\tau}{t}dt = 2K\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t/\tau}{t/\tau}d(t/\tau) = -2K\pi = 1$

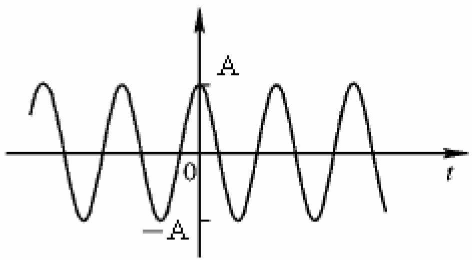
$\Rightarrow K = 1/2\pi$

2.2 写出下列复频率所代表的指数信号表达式，并画出其波形。

（3）j5; （5）$-1+j2$

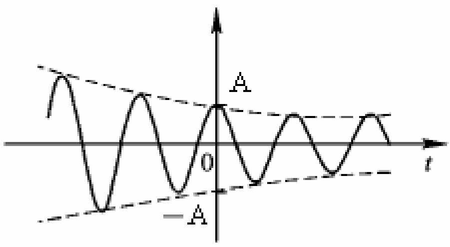
解：（3） $f(t) = Ae^{j5t} = A(\cos 5t + j\sin 5t)$ $\quad \omega = 5, T = 2\pi/\omega = 2\pi/5$

所以，虚指数信号 $f(t)$ 的实部和虚部均为等幅正弦振荡，其振荡角频率随 ω 的改变而变化。实部波形如图所示。



（5） $f(t) = Ae^{(-1+j2)t} = Ae^{-t}(\cos 2t + j\sin 2t)$ $\quad \omega = 2, T = 2\pi/\omega = \pi$

可见，复指数信号 $f(t)$ 的实部和虚部均为振幅呈指数衰减的正弦振荡，其实部波形如图所示。



2.4 计算卷积积分 $f_1(t) * f_2(t)$：

(3) $f_1(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$, $f_2(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$；

(7) $f_1(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$, $f_2(t) = \sin t\varepsilon(t)$；

(9) $f_1(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$, $f_2(t) = e^{-3t}\varepsilon(t+3)$；

解：(3) $t<0, f_1(t) * f_2(t) = 0$

$$t \ge 0, f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-2t+\tau} d\tau = e^{-2t} e^{\tau}\Big|_0^t = (e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(7) $t<0, f_1(t) * f_2(t) = 0$

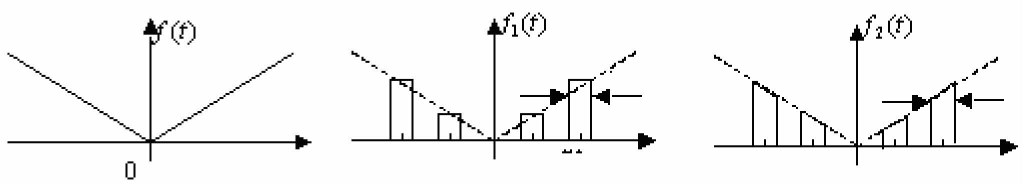
$$t \ge 0, f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \sin\tau e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\sin\tau d\tau = e^{-t}\frac{e^{\tau}(\sin\tau - \cos\tau)}{2}\Big|_0^t = \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t)\varepsilon(t)$$

(9) $t<-2, f_1(t) * f_2(t) = 0$

$$t \ge -2, f_1(t) * f_2(t) = \int_1^{t+3} e^{-2\tau} e^{-3(t-\tau)} d\tau = e^{-3t} e^{\tau}\Big|_1^{t+3} = e^{-3t}(e^{t+3} - e)\varepsilon(t+2) = (e^{-2t+3} - e^{-3t+1})\varepsilon(t+2)$$

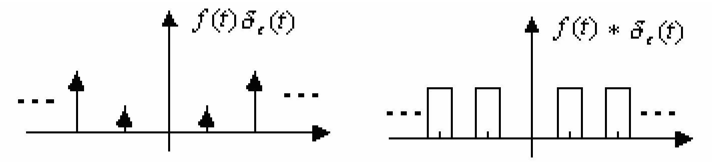
2.5 已知 $f(t)$ 如题图 2.2(a)所示。试用 $f(t), \delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT), g_\tau(t)$ 进行两种运算(相乘和卷积)，构成题图 2.2(b)和(c)所示的 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$。其中，$g_\tau(t)$ 定义如下：

$$g_\tau(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



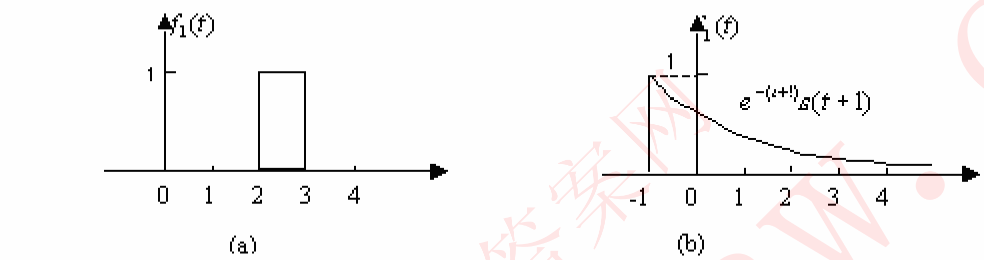
(a) (b) (c)

解： $f(t)\delta_T(t)=t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$



$\therefore\ f_1(t)=[f(t)\delta_T(t)]*g_\tau(t) \qquad f_2(t)=f(t)[\delta_T(t)*g_\tau(t)]$

2.9 已知信号$f_1(t)$ 和$f_2(t)$ 波形如题图 2.5 所示，试计算$f_1(t)*f_2(t)$ 。



解： 利用卷积的微积分性质

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=[\delta(t-2)-\delta(t-3)]*\int_{-\infty}^{t}e^{(-t+1)}\varepsilon(t+1)dt$$

$$=[\delta(t-2)-\delta(t-3)]*(1-e^{-(t+1)})\varepsilon(t+1)$$

$$=(1-e^{-(t-2+1)})\varepsilon(t-2+1)-(1-e^{-(t-3+1)})\varepsilon(t-3+1)$$

$$=(1-e^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)-(1-e^{-(t-2)})\varepsilon(t-2)$$

2.10 给定如下传输算子 H（p），试写出它们对应的微分方程。

(2) $H(p)=\dfrac{p+1}{p+1}$;

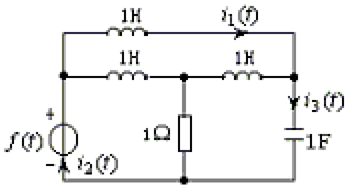
(4) $H(p)=\dfrac{p(p+3)}{(p+1)(p+2)}$。

解： (2) $H(p)=\dfrac{p+1}{p+1}\Rightarrow y'(t)+y(t)=f'(t)+f(t)$

(4) $H(p)=\dfrac{p(p+3)}{(p+1)(p+2)}=\dfrac{p^2+3p}{p^2+3p+2}\Rightarrow y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f''(t)+3f'(t)$

2.13 在如题图 2.7 所示电路中，试分别求出响应 $i_1(t)$、$i_2(t)$、$i_3(t)$ 对激励 $f(t)$ 的传输算子

$H_1(p)$、$H_2(p)$、$H\ (p)$。



题图 2.7

解：列网孔电流方程：

$$\begin{cases} 3pi_1(t) - pi_2(t) - pi_3(t) = 0 \\ -pi_1(t) - i_2(t) + (1+p+1/p)i_3(t) = 0 \\ -pi_1(t) + (1+p)i_2(t) - i_3(t) = f(t) \end{cases}$$

$$i_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -p & -p \\ 0 & -1 & 1+p+1/p \\ f(t) & 1+p & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & -1 & 1+p+1/p \\ -p & 1+p & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-p(p^2+2p+1)/p}{-(p^3+2p^2+2p+3)} f(t) = \frac{p(p^2+2p+1)f(t)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

$$i_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3p & 0 & -p \\ -p & 0 & 1+p+1/p \\ -p & f(t) & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & -1 & 1+p+1/p \\ -p & 1+p & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-p(2p^2+3p+3)/p}{-(p^3+2p^2+2p+3)} f(t) = \frac{p(2p^2+3p+3)f(t)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

$$i_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & -1 & 1+p+1/p \\ f(t) & 1+p & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & -1 & 1+p+1/p \\ -p & 1+p & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-p(p^2+2p+1)/p}{-(p^3+2p^2+2p+3)} f(t) = \frac{p(p^2+2p+1)f(t)}{p(p^3+2p^2+2p+3)}$$

2.17 描述 LTI 连续系统的微分方程如下：

(2) $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)+f(t)\qquad y_x(0^+)=0,\ y_x'(0^+)=1$

试求系统的零输入响应 $y_x(t)$。

解：$\because\ A(p)=p^2+4p+4=(p+2)^2\qquad y_x(0^+)=y_x(0^-)=1$

$\therefore\ y_x(t)=(c_{10}+c_{11}t)e^{-2t}\qquad y_x'(t)=(-2c_{10}+c_{11}-2c_{11}t)e^{-2t}$

$$\begin{cases}c_{10}=1\\-2c_{10}+c_{11}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}c_{10}=1\\c_{11}=3\end{cases}\Rightarrow\quad y_x(t)=(1+3t)e^{-2t}\quad t\ge 0$$

2.18 已知连续系统的输入输出算子方程及初始条件如下：

(2) $y(t)=\dfrac{-(2p+1)}{p(p^2+4p+8)}f(t)\qquad y_x(0^+)=0,\ y_x'(0^+)=1,\ y_x''(0^+)=0$

试求系统的零输入响应。

解：$\because\ A(p)=p(p^2+4p+8)=p(p+2+2i)(p+2-2i)\qquad y_x^{(i)}(0^+)=y_x^{(i)}(0^-)$

$\therefore\ y_x(t)=c_{10}+c_{20}e^{-(2+2i)t}+c_{30}e^{-(2-2i)t}\qquad y_x'(t)=-(2+2i)c_{20}e^{-(2+2i)t}-(2-2i)c_{30}e^{-(2-2i)t}$

$y_x''(t)=(2+2i)^2c_{20}e^{-(2+2i)t}+(2-2i)^2c_{30}e^{-(2-2i)t}$

$$\begin{cases}c_{10}+c_{20}+c_{30}=0\\-(2+2i)c_{20}-(2-2i)c_{30}=1\\(2+2i)^2c_{20}+(2-2i)^2c_{30}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}c_{10}=1/2\\c_{20}=-1/4\\c_{30}=-1/4\end{cases}\Rightarrow$$

$\therefore\ y_x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}e^{-2t}(e^{-2it}+e^{2it})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t\quad t\ge 0$

2.19 已知连续系统的传输算子 H(p) 如下：

(1) $H(p)=\dfrac{p^3+3p^2-p-5}{p^2+5p+6}$;　　(2) $H(p)=\dfrac{3p^2+10p+26}{p(p^2+4p+13)}$;

试求系统的单位冲激响应 h(t)。

解：（1）$H(p)=\dfrac{p^3+3p^2-p-5}{p^2+5p+6}=p-2+\dfrac{2}{p+3}+\dfrac{1}{p+2}$

$$\therefore\ h(t)=\delta'(t)-2\delta(t)+2e^{-3t}\varepsilon(t)+e^{-2t}\ \varepsilon(t)$$

(2) $$H(p)=\frac{3p^2+10p+26}{p(p^2+4p+13)}=\frac{3p^2+10p+26}{p(p+2+3i)(p+2-3i)}=\frac{2}{p}+\frac{1/2}{p+2+3i}+\frac{1/2}{p+2-3i}$$

$$\therefore\ h(t)=(2+e^{-2t}\cos 3t)\,\varepsilon(t)$$

2.23 已知系统微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2=f'(t)+3f(t)$，$0^-$ 初始条件 $y(0^-)=1,y'(0^-)=2$，试求：

（1） 系统的零输入响应 $y_x(t)$；

（2） 输入 $f(t)=\varepsilon(t)$ 时，系统的零状态响应和完全 响应；

（3） 输入 $f(t)=e^{3t}\varepsilon(t)$ 时，系统的零状态响应和完响应。

解：(1) $H(p)=\dfrac{p+3}{p^2+3p+2}=\dfrac{2}{p+1}-\dfrac{1}{p+2}$，　$A(p)=(p+1)(p+2)$

$$\therefore\ y_x(t)=c_{10}e^{-t}+c_{20}e^{-2t}\qquad y_x'(t)=-c_{10}e^{-t}-2c_{20}e^{-2t}$$

$$\begin{cases}c_{10}+c_{20}=1\\-c_{10}-2c_{20}=2\end{cases}\qquad\begin{cases}c_{10}=4\\c_{20}=-3\end{cases}\Rightarrow\quad\therefore\ y_x(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}\quad t\ge 0$$

(2) 由 H (P) 得：

$$h(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

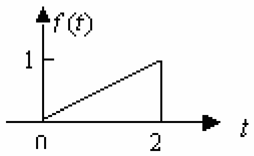
$$y_f(t)=f(t)*h(t)=\varepsilon(t)*(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)=2(1-e^{-t})\varepsilon(t)-\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\varepsilon(t)\ =(1.5-2e^{-t}+0.5e^{-2t})\varepsilon(t)$$

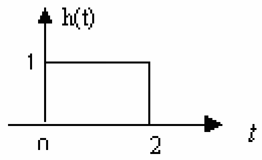
完全响应：$y(t)=y_x(t)+y_f(t)==(1.5+2e^{-t}-2.5e^{-2t})\varepsilon(t)$

(3) $$y_f(t)=f(t)*h(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)*(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)=\left[(e^{-t}-e^{-3t})-(e^{-2t}-e^{-3t})\right]\varepsilon(t)\ =(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

完全响应：$y(t)=y_x(t)+y_f(t)==(5e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$

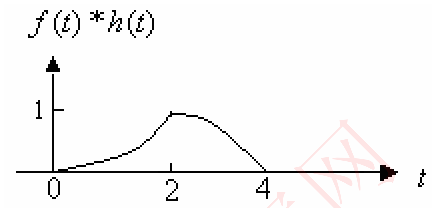
2.24 某 LTI 系统的输入 $f(t)$ 和冲激响应 h(t)如题图 2.11 所示，试求系统的零状态响应，并 画出波形。



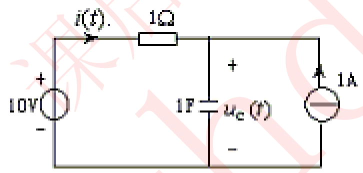


解： $y_f(t) = f(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t<0, t>4 \\ t^2/4 & 0 \le t < 2 \\ 1-(t-2)^2/4 & 2 \le t < 4 \end{cases}$

其波形为：

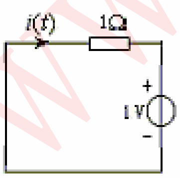


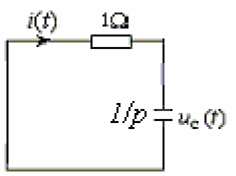
2.26 如题图 2.13 所示电路，各电源在 t=0 时刻接入，已知!，求输出电流!的零输入响应、状态响应和完全响应。



题图 2.13

解： （1） 0^-等效电路　　零输入时的算子电路模型



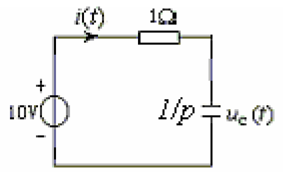


$R \cdot i(0^-) = -u_c(0^-) = -1(V) \quad \therefore i(0^-) = -1(A)$

$(1+1/p)i(t) = 0 \Rightarrow (p+1)i(t) = 0 \Rightarrow i_x(t) = c_1 e^{-t}\varepsilon(t)$,代入0^-初始条件，得$c_1 = -1$

$\therefore \quad i_x(t) = -e^{-t}\varepsilon(t)$

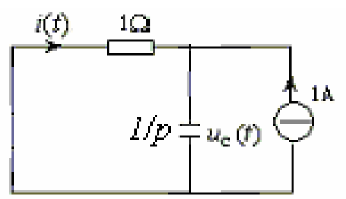
（2） $f_1(t)=u_s(t)=10\varepsilon(t)$单独作用



$$(1+1/p)i(t)=f_1(t)\Rightarrow H_1(p)=\frac{1}{1+1/p}=\frac{p}{1+p}=1+\frac{1}{1+p}\Rightarrow h_1(t)=\delta(t)-e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$\therefore\quad y_{f_1}(t)=h_1(t)*f_1(t)=[\delta(t)-e^{-t}\varepsilon(t)]*10\varepsilon(t)=10\varepsilon(t)-10(1-e^{-t})\varepsilon(t)=10e^{-t}\varepsilon(t)$$

(3) $f_2(t)=i_s(t)=\varepsilon(t)$单独作用



$$i(t)\cdot R=-\frac{1}{p}(i(t)+i_s(t)),(1+p)i(t)=-i_s(t)\Rightarrow i(t)=\frac{-1}{(1+p)}i_s(t)$$

$$\Rightarrow H_2(p)=\frac{-1}{1+p}\Rightarrow h_2(t)=-e^{-t}\varepsilon(t)$$

$$\therefore\quad y_{f_2}(t)=h_2(t)*f_2(t)=-e^{-t}\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=-(1-e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$\therefore\quad y_f(t)=y_{f_1}(t)+y_{f_2}(t)=-(1-11e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow y(t)=y_f(t)+y_x(t)=(10e^{-t}-1)\varepsilon(t)$$

2.28 给定下列系统的输入输出算子方程、初始条件和输入信号，试分别求其完全响应。

指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应、暂态响应和稳态响应分量。

(2) $(p^2+2p+1)y(t)=(p+1)f(t)\qquad y(0^-)=1, y'(0^-)=2, f(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$

解：　(1) 求 $y_x(t)$ ：

$$\because\ A(p)=(p^2+2p+1)=(p+1)^2$$

$$\therefore\ y_x(t)=(c_{10}+c_{11}t)e^{-t}\qquad y'_x(t)=-(c_{10}+c_{11}t)e^{-t}+c_{11}e^{-t}$$

$$\begin{cases}c_{10}=1\\-c_{10}+c_{11}=2\end{cases}\qquad\begin{cases}c_{10}=1\\c_{11}=3\end{cases}\Rightarrow\therefore\ y_x(t)=(1+3t)e^{-t}\qquad t\ge 0$$

(2) 求 $y_f(t)$ ：

$$H(\mathrm{p})=\frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}^2+2\mathrm{p}+1}=\frac{\mathrm{K}_1}{(p+1)^2}+\frac{\mathrm{K}_2}{p+1}=\frac{1}{p+1}, \qquad \mathrm{h}(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{y}_{\mathrm{f}}(t)=f(t)*h(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)*\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(\mathrm{t})=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(\mathrm{t})$$

(3) 求完全响应： $\mathrm{y}(\mathrm{t})=\mathrm{y}_{\mathrm{x}}(t)+\mathrm{y}_{\mathrm{f}}(t)=(2+3t)\,\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(\mathrm{t})-\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(\mathrm{t})$

(4) 求特解（强迫响应）： $\because f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(\mathrm{t})$

$$\therefore \begin{cases} \mathrm{y}_{\mathrm{p}}(t)=Q_0e^{-2t}\varepsilon(t) \\ \mathrm{y}_{\mathrm{p}}'(t)=-2Q_0e^{-2t}\varepsilon(t) \\ \mathrm{y}_{\mathrm{p}}''(t)=4Q_0e^{-2t}\varepsilon(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{代入微分方程}} (4Q_0-4Q_0+Q_0)\;e^{-2t}\varepsilon(t)=(-2e^{-2t}+e^{-2t})\;\varepsilon(t)$$

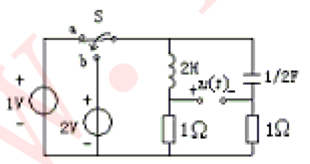
$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Q}_0=-1$$

$$\therefore\ \mathrm{y}_{\mathrm{p}}(t)=-\mathrm{e}^{-2t} \quad \mathrm{t}\ge 0$$

(5) 自由响应： $\mathrm{y}_{\mathrm{h}}(t)=\mathrm{y}(\mathrm{t})-\mathrm{y}_{\mathrm{p}}(t)=(2+3t)\,\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(\mathrm{t})$

(6) 暂态响应＝y(t)、稳态响应＝0。

2.29 如题图 2.14 所示电路，他 $t<0$ 时已处稳态。$t=0$ 时，开关 S 由位置 a 打至 b。求输出电压 $u(t)$ 的零输入响应、零状态响应和完全响应。

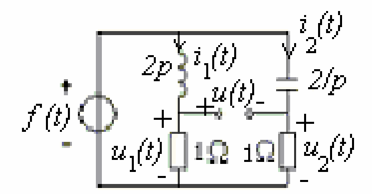


题图 2.14

解：本题可有多种解法，这里采用信号分解方法。

$$\mathrm{f}(\mathrm{t})=\mathrm{f}_1(t)+f_2(t) \quad \begin{cases} \mathrm{f}_1(t)=1-\varepsilon(t) & \text{引起零输入响应} \\ \mathrm{f}_2(t)=2\varepsilon(t) & \text{引起零状态响应} \end{cases}$$

算子电路模型为：



算子方程为： $u(p)=u_1(p)-u_2(p)=\dfrac{f(p)}{2p+1}-\dfrac{f(p)}{2/p+1}=\left(\dfrac{1}{2p+1}-\dfrac{p}{2+p}\right)f(p)$

$$H(p)=\left(\frac{1}{2p+1}-\frac{p}{2+p}\right)=\frac{1}{2p+1}-1+\frac{2}{2+p}=\frac{1/2}{p+1/2}-1+\frac{2}{2+p}$$

$$h(t)=-\delta(t)+\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}+2e^{-2t}\right)\varepsilon(t)$$

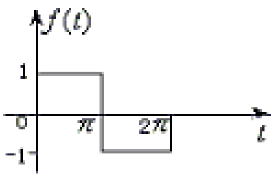
$$y_x(t)=f_1(t)*h(t)=[-\delta(t)+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\varepsilon(t)+2e^{-2t}\varepsilon(t)]*[1-\varepsilon(t)]=(e^{-\frac{t}{2}}+e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y_f(t)=f_2(t)*h(t)=2[-\delta(t)+\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\varepsilon(t)+2e^{-2t}\varepsilon(t)]*\varepsilon(t)=2(1-e^{-\frac{t}{2}}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$\therefore y(t)=y_x(t)+y_f(t)=(2-e^{-\frac{t}{2}}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

第三章　习题解答（供参考）

3.1 证明题图 3.1 所示矩形函数 $f(t)$ 与 $\{\cos nt \mid n$ 为整数$\}$在区间（$0, 2\pi$）上正交。

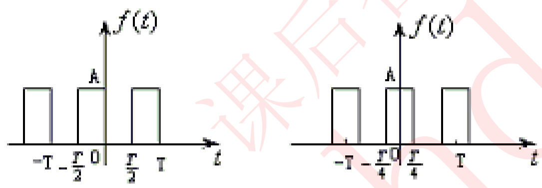


题图3.1

证：$\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt = \int_0^{\pi}\cos ntdt - \int_{\pi}^{2\pi}\cos ntdt = \frac{1}{n}\left[\sin nt\ \Big|_0^{\pi} - \sin nt\ \Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 0$

即 f(t)与{cosnt}在（0,2π）上正交。

3.5 试求题图 3.3 所示信号的三角形傅立叶级数展开式，并画出频谱图。



题图 3.3

解：（1）$f(t) = \begin{cases} A & -T/2 \sim 0 \\ 0 & 0 \sim T/2 \end{cases}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} Adt = A$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\Omega tdt = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{0}\cos n\Omega tdt = \frac{2A}{T}\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}\Bigg|_{-T/2}^{0} = 0$$

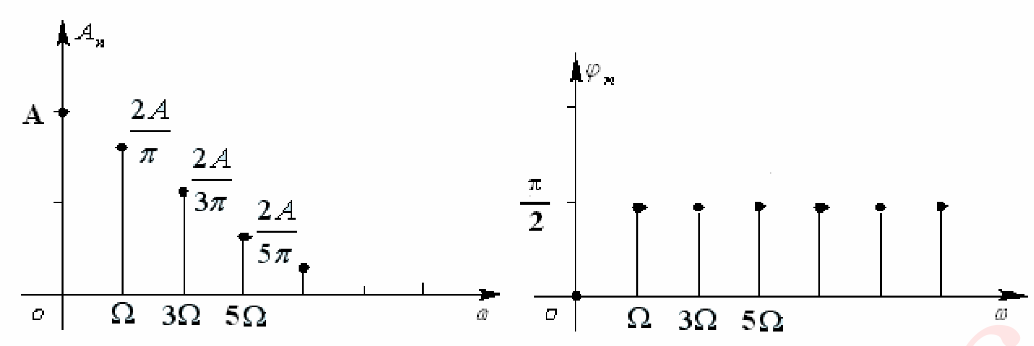
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\Omega tdt = \frac{2A}{T}\int_{-T/2}^{0}\sin n\Omega tdt = -\frac{2A}{T}\frac{\cos n\Omega t}{n\Omega}\Bigg|_{-T/2}^{0} = \frac{A}{n\pi}[\cos n\pi - 1]$$

$$= \begin{cases} -2A/n\pi & n = 1,3,5,... \\ 0 & n = 2,4,6,.. \end{cases}$$

所以

$$f(t)=\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\Omega t=\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sin\Omega t-\frac{2A}{3\pi}\sin 3\Omega t-\frac{2A}{5\pi}\sin 5\Omega t-\dots$$

$$=\frac{A}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\Omega t$$



(2) $f(t)=\begin{cases}A & -T/4\sim T/4\\ 0 & T/4\sim 3T/4\end{cases}$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4}Adt=A$$

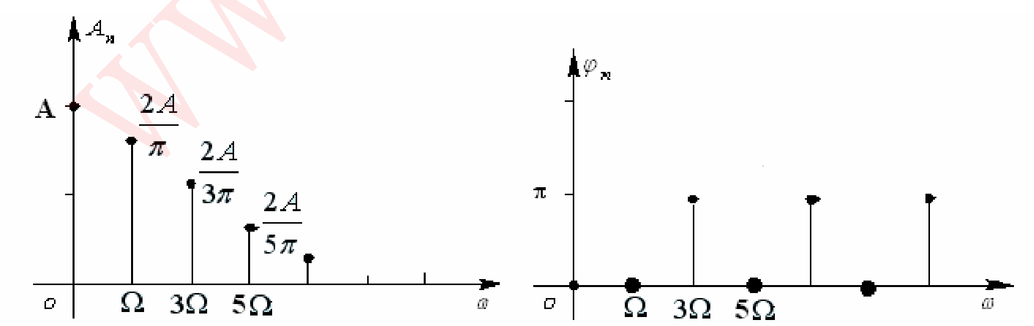
$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\Omega tdt=\frac{2A}{T}\int_{-T/4}^{T/4}\cos n\Omega tdt=\frac{2A}{T}\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}\Big|_{-T/4}^{T/4}=\frac{2A}{n\pi}\sin(n\pi/2)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\Omega tdt=\frac{2A}{T}\int_{-T/4}^{T/4}\sin n\Omega tdt=-\frac{2A}{T}\frac{\cos n\Omega t}{n\Omega}\Big|_{-T/4}^{T/4}=0$$

所以

$$f(t)=\frac{A}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\Omega t=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\cos\Omega t-\frac{2A}{3\pi}\cos 3\Omega t+\frac{2A}{5\pi}\cos 5\Omega t-\dots$$

$$=\frac{A}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2A}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\Omega t$$



3.6 试求题图 3.4 所示周期信号的指数形傅立叶级数系数 F_n，并画出它的幅度谱。

(a)　　题图 3.4　　(d)

解：（a） $f(t)=\begin{cases}A\sin\Omega t & 0\sim T/2\\ 0 & T/2\sim T\end{cases}$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\Omega t}dt=\frac{A}{T}\int_0^{T/2}\sin\Omega t e^{-jn\Omega t}dt=\frac{A}{T}\frac{e^{-jn\Omega t}(-jn\Omega\sin\Omega t-\Omega\cos\Omega t)}{(-jn\Omega)^2+\Omega^2}\Bigg|_0^{T/2}$$

$$=\frac{A}{T(1-n^2)\Omega^2}[e^{-jn\pi}(-jn\Omega\sin\pi-\Omega\cos\pi)+\Omega]$$

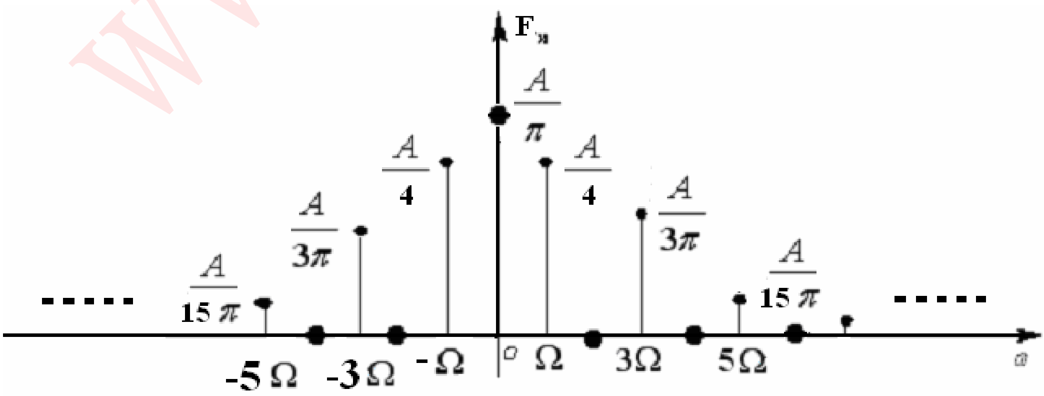
$$=\frac{A(e^{-jn\pi}+1)\Omega}{T(1-n^2)\Omega^2}=\frac{A}{2\pi(1-n^2)}(\cos n\pi+1)$$

$$F_1=\frac{A}{T}\int_0^{T/2}\sin\Omega t e^{-j\Omega t}dt=\frac{A}{2jT}\int_0^{T/2}(e^{j\Omega t}-e^{-j\Omega t})e^{-j\Omega t}dt=\frac{A}{2jT}t\Big|_0^{T/2}=\frac{A}{4j}$$

$$F_{-1}=\frac{A}{T}\int_0^{T/2}\sin\Omega t e^{j\Omega t}dt=\frac{A}{2jT}\int_0^{T/2}(e^{j\Omega t}-e^{-j\Omega t})e^{j\Omega t}dt=\frac{A}{2jT}(-t)\Big|_0^{T/2}=-\frac{A}{4j}$$

所以

$$F_n=\begin{cases}\dfrac{A}{\pi(1-n^2)} & n=\pm2,\pm4,\ldots\\ 0 & n=\pm3,\pm5,\ldots\\ -jn\dfrac{A}{4} & n=\pm1\end{cases}$$



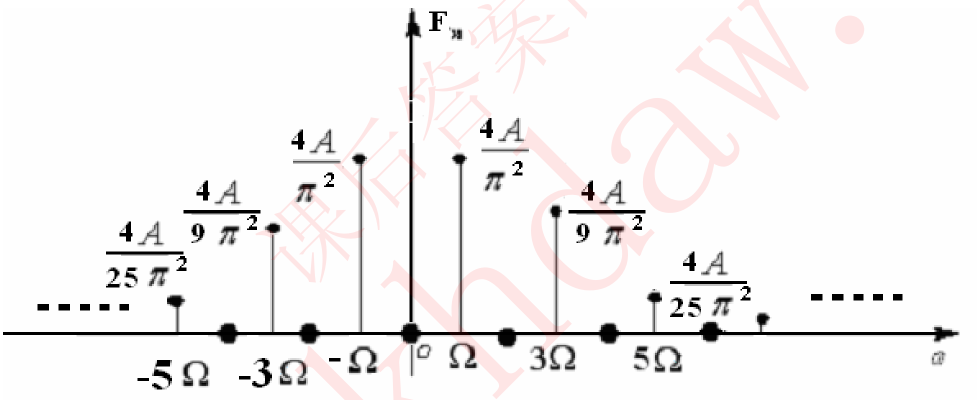
(d) $f(t)=\begin{cases} A+\dfrac{4A}{T}t & -T/2\sim 0 \\ A-\dfrac{4A}{T}t & 0\sim T/2 \end{cases}$

$$F_n=\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}(A+\frac{4A}{T}t)e^{-jn\Omega t}dt+\int_{0}^{T/2}(A-\frac{4A}{T}t)e^{-jn\Omega t}dt\right]$$

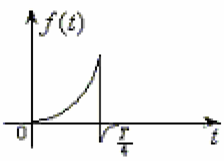
$$=\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0}\frac{4A}{T}te^{-jn\Omega t}dt-\int_{0}^{T/2}\frac{4A}{T}te^{-jn\Omega t}dt+\int_{-T/2}^{T/2}Ae^{-jn\Omega t}dt\right]$$

$$=\left[\frac{A\cos n\pi}{-jn\pi}+\frac{A(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}\right]+\left[\frac{A\cos n\pi}{jn\pi}+\frac{A(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}\right]$$

$$=\frac{2A(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}=\begin{cases}\dfrac{4A}{n^2\pi^2} & n=\pm1,\pm3,\ldots \\ 0 & n=0,\pm2,\ldots\end{cases}$$



3.7 已知周期函数 $f(t)$ 前四分之一的周期的波形如题图 3.5 所示。根据下列各情况的要求，画出 $f(t)$ 在一个周期（0<t<T）的波形。



题图 3.5

（1） $f(t)$ 是偶函数，只含有偶次谐波；

（2） $f(t)$ 是偶函数，只含有奇次谐波；

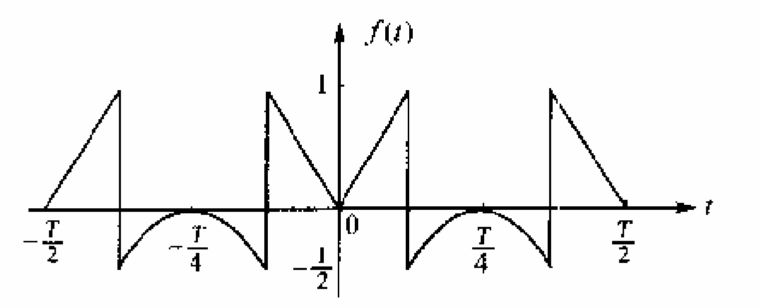
（3） $f(t)$ 是偶函数，含有偶次和奇次谐波；

（4） $f(t)$ 是奇函数，只含有偶次谐波；

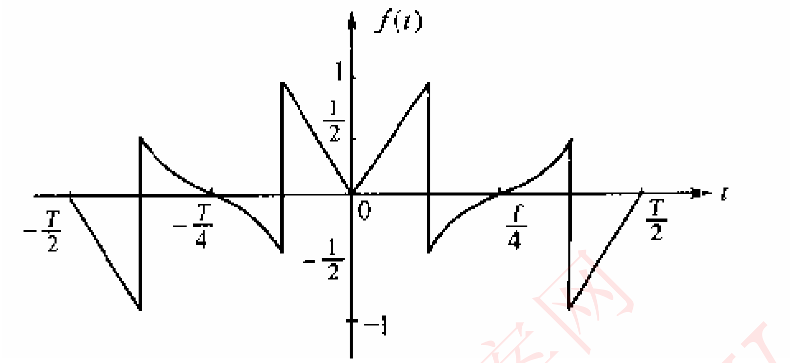
（5） $f(t)$ 是奇函数，只含有奇次谐波；

（6） $f(t)$ 是奇函数，含有偶次和奇次谐波。

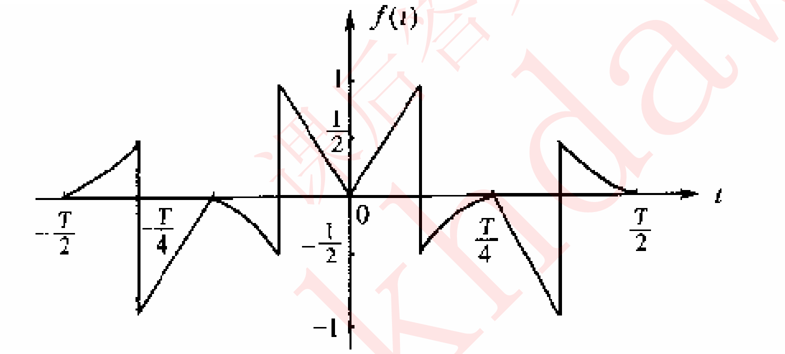
解：(1)


f(t)
1
0
t
$-\frac{T}{2}$
$-\frac{T}{4}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$

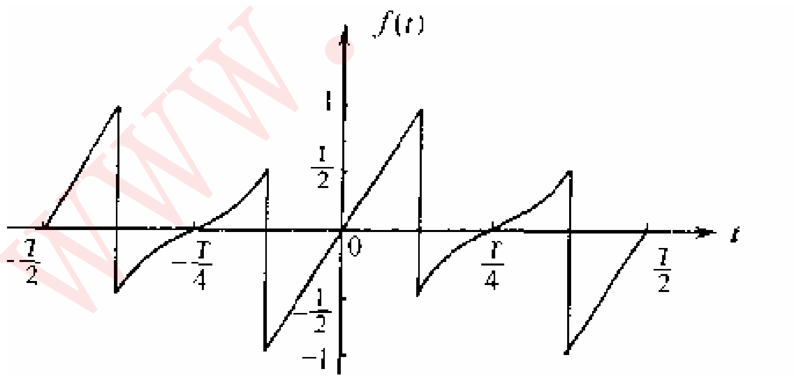
(2)

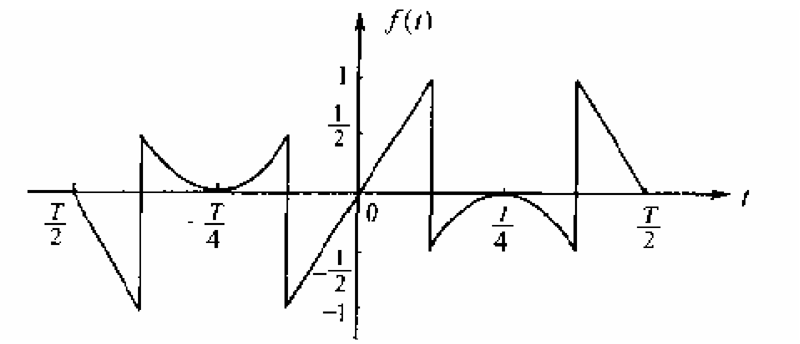

f(t)
1
$\frac{1}{2}$
0
t
$-\frac{T}{2}$
$-\frac{T}{4}$
$-\frac{1}{2}$
−1
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$

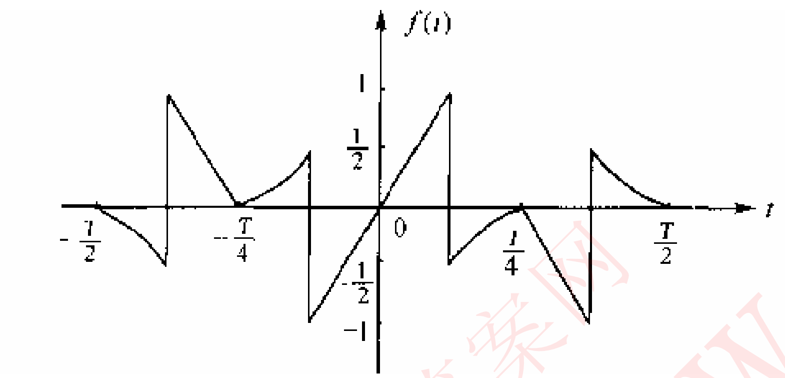
(3)


f(t)
1
$\frac{1}{2}$
0
t
$-\frac{T}{2}$
$-\frac{T}{4}$
$-\frac{1}{2}$
−1
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$

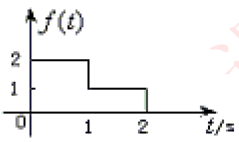
(4)


f(t)
1
$\frac{1}{2}$
0
t
$-\frac{T}{2}$
$-\frac{T}{4}$
$-\frac{1}{2}$
−1
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$

(5) 

(6) 

3.11 求题图 3.6 所示信号的傅立叶变换。



题图 3.6

解： $f(t)=2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]=2\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

因为 $\varepsilon(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$

所以

$$F(j\omega)=2\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j\omega}-\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]e^{-j2\omega}$$

$$=2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{j\omega}-\pi\delta(\omega)-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}-\pi\delta(\omega)-\frac{e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

$$=\frac{1}{j\omega}[2-e^{-j\omega}-e^{-j2\omega}]$$

3.13 试用$f(t)$的傅立叶变换$F(jw)$表示如下函数的傅立叶变换：

(1) $tf(2t)$；　　(2) $(t-2)f(t)$;

(3) $(t-2)f(-2t)$;　　(4) $t\dfrac{df(t)}{dt}$;

(5) $(1-t)f(1-t)$。

解：(1) $f(2t)\leftrightarrow\frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)$, $\quad -jtf(t)\leftrightarrow\frac{dF(j\omega)}{d\omega}$, $\quad \therefore tf(2t)\leftrightarrow\frac{j}{2}\frac{dF(j\omega/2)}{d\omega}$

(2) $(t-2)f(t)\leftrightarrow j\frac{dF(j\omega)}{d\omega}-2F(j\omega)$

(3) $f(-2t)\leftrightarrow\frac{1}{2}F\left(-j\frac{\omega}{2}\right)$, $\quad \therefore (t-2)f(-2t)\leftrightarrow\frac{j}{2}\frac{dF(-j\omega/2)}{d\omega}-F(-j\omega/2)$

(4) $\frac{df(t)}{dt}\leftrightarrow(j\omega)F(j\omega)$, $\quad \therefore t\frac{df(t)}{dt}\leftrightarrow j[(j\omega)F(j\omega)]'=-F(j\omega)-\omega F'(j\omega)$

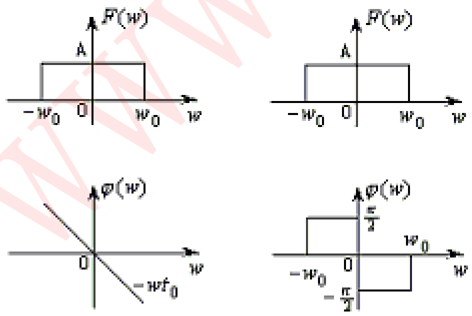
(5)

$f(1-t)=f[-(t-1)]\leftrightarrow F(-j\omega)e^{-j\omega}$, $\quad \therefore (1-t)f(1-t)\leftrightarrow F(-j\omega)e^{-j\omega}-j[F(-j\omega)e^{-j\omega}]'$

$$=F(-j\omega)e^{-j\omega}-j[F'(-j\omega)e^{-j\omega}-jF(-j\omega)e^{-j\omega}]$$

$$=-jF'(-j\omega)e^{-j\omega}$$

3.18 求题图3.10 (a)、(b) 所示$F(jw)$的傅立叶反变换$f(t)$。



题图 3.10

【解】

(a) $F(j\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}=\begin{cases}A\,e^{-j\omega t_0} & |\omega_0|\le\omega_0\\ 0 & |\omega_0|>\omega_0\end{cases}$

因此 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}A\,e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega=A\,\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0(t-t_0))$

(b) 由于 $e^{j\frac{\pi}{2}}=j$，$e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j$，所以频谱可以写为：

$F(j\omega)=A\,[\,jg_{\omega_0}(\omega+\omega_0/2)-jg_{\omega_0}(\omega-\omega_0/2)]$

由 $\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\longleftrightarrow\frac{\pi}{\omega_0}g_{2\omega_0}(\omega)$ 可得：

$$f(t)=A\,\frac{\omega_0}{2\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t/2)j(e^{-j\omega_0 t/2}-e^{j\omega_0 t/2})=\frac{A\,\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t/2)\sin(\omega_0 t/2)$$
$$=\frac{2A\sin^2(\omega_0 t/2)}{\pi t}$$

3.21 已知 $f(t)*f'(t)=(1-t)e^{-t}\varepsilon(t)$，求信号 $f(t)$。

解：$f(t)*f'(t)\leftrightarrow F(j\omega)\bullet(j\omega)F(j\omega)=(j\omega)F^2(j\omega)$

而：$(1-t)e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{(1+j\omega)^2}=\frac{j\omega}{(1+j\omega)^2}$

$$\therefore\quad F^2(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)^2}\Leftrightarrow F(j\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)}\Leftrightarrow f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$$

3.24 试求题图3.4 所示各周期信号的频谱函数。

解：（a）
$$F_n=\begin{cases}\frac{A}{\pi(1-n^2)} & n=\pm2,\pm4,\ldots\\ 0 & n=\pm3,\pm5,\ldots\\ -jn\frac{A}{4} & n=\pm1\end{cases}$$

$$\therefore F[f(t)] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{A}{\pi(1-4n^2)}\delta(\omega-2n\Omega)+\frac{j\pi A}{2}\delta(\omega+\Omega)-\frac{j\pi A}{2}\delta(\omega-\Omega)$$

(d)

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{4A}{n^2\pi^2} & n=\pm1,\pm3,\ldots \\ 0 & n=0,\pm2,\ldots \end{cases}$$

$$\therefore F[f(t)] = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4A}{\pi^2(2n+1)^2}\delta[\omega-(2n+1)\Omega] = \begin{cases} \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{A}{n^2}\delta(\omega-n\Omega) & n=\pm1,\pm3,\ldots \\ 0 & n=0,\pm2,\ldots \end{cases}$$

3.26 对下列信号求奈奎斯特间隔和速率：

(1)Sa(100t)；　(2) $Sa^2(100t)$；

(3) $Sa(100t)+Sa(50t)$;　(4) $Sa(100t)+Sa^2(60t)$。

解：(1) $\omega_m=100rad/s$　$T_m=\dfrac{2\pi}{\omega_m}=\dfrac{\pi}{50}s$　$\therefore$　$T_s=\dfrac{\pi}{100}s$,　$f_s=\dfrac{100}{\pi}Hz$

(2) $\omega_m=200rad/s$　$T_m=\dfrac{2\pi}{\omega_m}=\dfrac{\pi}{100}s$　$\therefore$　$T_s=\dfrac{\pi}{200}s$,　$f_s=\dfrac{200}{\pi}Hz$

(3) $\omega_m=100rad/s$　$T_m=\dfrac{2\pi}{\omega_m}=\dfrac{\pi}{50}s$　$\therefore$　$T_s=\dfrac{\pi}{100}s$,　$f_s=\dfrac{100}{\pi}Hz$

(4) $\omega_m=120rad/s$　$T_m=\dfrac{2\pi}{\omega_m}=\dfrac{\pi}{60}s$　$\therefore$　$T_s=\dfrac{\pi}{120}s$,　$f_s=\dfrac{120}{\pi}Hz$

3.27 已知一线形非时变系统的方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{df(t)}{dt}+2f(t)$$

求其系统函数 $H(jw)$ 和冲激响应 $h(t)$。

解：对微分方程两边作傅里叶变换：

$$(j\omega)^2 Y(j\omega)+4(j\omega)Y(j\omega)+3Y(j\omega)=(j\omega)F(j\omega)+2F(j\omega)$$

$$\left[(j\omega)^2+4(j\omega)+3\right]Y(j\omega)=\left[(j\omega)+2\right]F(j\omega)$$

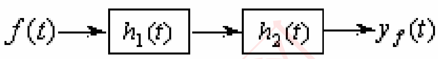
$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}=\frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}=\frac{1/2}{j\omega+3}+\frac{1/2}{j\omega+1}$$

$$\therefore h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-3t}+e^{-t}\right)\varepsilon(t)$$

3.29 如题图 3.11 所示系统，其中：

$$h_1(t)=\frac{\sin 2t}{\pi t}$$

$$h_2(t)=2\pi\bullet\frac{\sin t}{\pi t}\bullet\frac{\sin 2t}{\pi t}$$



题图 3.11

试求整个系统的冲激响应 $h(t)$。

解　由对称特性知：

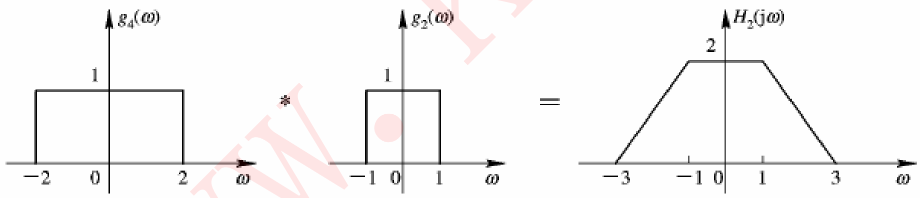
$$\frac{\sin 2t}{\pi t}\longleftrightarrow g_4(\omega)$$

$$\frac{\sin t}{\pi t}\longleftrightarrow g_2(\omega)$$

有：

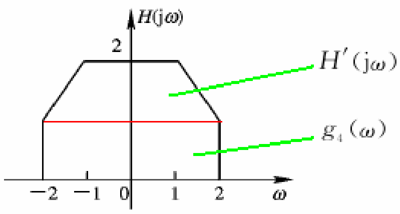
$$H_1(j\omega)=g_4(\omega)$$

$$H_2(j\omega)=g_4(\omega)*g_2(\omega)$$

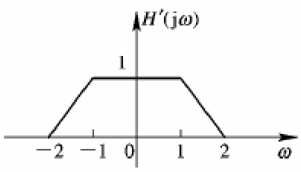


$$H(j\omega)=H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

级联系统 $H(j\omega)$ 的图形



$$H(j\omega)=g_4(\omega)+H'(j\omega)$$



$H'(j\omega)$ 又可表示为

$$H'(j\omega)=g_3(\omega)*g_1(\omega)$$

所以

$$H(j\omega)=g_4(\omega)+g_3(\omega)*g_1(\omega)$$

又因为

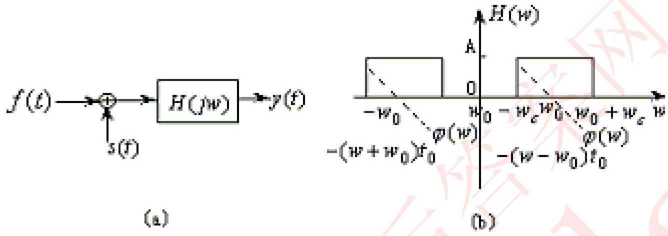
$$\frac{\sin(3t/2)}{\pi t}\longleftrightarrow g_3(\omega)$$

$$\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\longleftrightarrow g_1(\omega)$$

所以

$$h(t)=\frac{\sin 2t}{\pi t}+2\pi\frac{\sin(3t/2)}{\pi t}\cdot\frac{\sin(t/2)}{\pi t}$$

3.30 已知$f(t)=Sa(w_c t)$，$s(t)=\cos w_0 t$，且$w_0>>w_c$。求题图 3.12(a)所示系统的输出$y(t)$。



题图 3.12

解　因为

$$f_s(t)=f(t)\cdot s(t)$$

$$F(j\omega)=\frac{\pi}{\omega_c}g_{2\omega_c}(\omega)$$

$$S(j\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

所以

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(j\omega)$$

$$=\frac{\pi}{2\omega_c}[g_{2\omega_c}(\omega+\omega_0)+g_{2\omega_c}(\omega-\omega_0)]$$

系统为线性相位理想低通滤波器，所以

$$Y(j\omega)=F_s(j\omega)H(j\omega)$$

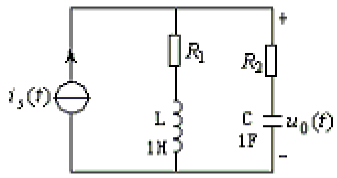
$$=\frac{\pi}{2\omega_c}[g_{2\omega_c}(\omega+\omega_0)e^{-j(\omega+\omega_0)t_0}+g_{2\omega_c}(\omega-\omega_0)e^{-j(\omega-\omega_0)t_0}]$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}f(t-t_0)+\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}f(t-t_0)$$

$$=f(t-t_0)\cos\omega_0 t=\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]\cos\omega_0 t$$

可见，系统输出为一个调制信号。

3.36 如题图 3.16 所示电路，在电流源$i_s(t)$激励下得到输出电压$u_0(t)$ 。求网络传输函数 $H(jw)$；要使$u_0(t)$与$i_s(t)$的波形无失真， 确定R_1和R_2 的值。



题图 3.16

解：$H(j\omega)=\dfrac{U_o(j\omega)}{I_s(j\omega)}=\dfrac{(R_2+1/j\omega)(R_1+j\omega)}{(R_2+1/j\omega+R_1+j\omega)}=\dfrac{(j\omega R_2+1)(R_1+j\omega)}{(R_1+R_2)j\omega+(1-\omega^2)}$

$H^2(\omega)=\dfrac{(R_1^2+\omega^2)(R_2^2\omega^2+1)}{(R_1+R_2)^2\omega^2+(1-\omega^2)^2}=K$，该式要对所有的ω都成立，所以有：

$R_2^2=1, R_2R_1+1=R_1+R_2, \Rightarrow R_2=1, R_1=1$

此时：$H(\omega)=1, \varphi(\omega)=0^\circ$

第四章　习题解答（供参考）

4．1　求下列信号的双边拉氏变换，并注明其收敛域。

(2) $e^{-t}\varepsilon(t)+e^{2t}\varepsilon(-t)$;　　　(3) $\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)$;

解：（2）设 $f_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$　$f_2(t)=e^{2t}\varepsilon(-t)$，则：

$$F_1(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\varepsilon(t)e^{-st}\mathrm{dt}=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+s)t}\mathrm{dt}=\frac{-e^{-(1+s)t}}{1+s}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{1+s}\quad \mathrm{Re[s]>-1}$$

$$F_2(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2t}\varepsilon(-t)e^{-st}\mathrm{dt}=\int_{-\infty}^{0}e^{-(s-2)t}\mathrm{dt}=\frac{-e^{-(s-2)t}}{s-2}\bigg|_{-\infty}^{0}=\frac{-1}{s-2}\quad \mathrm{Re[s]<2}$$

$$\therefore F(s)=F_1(s)+F_2(s)=\frac{1}{1+s}-\frac{1}{s-2}\quad -1<\mathrm{Re[s]}<2$$

(3)　$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)]e^{-st}\mathrm{dt}=\int_{-1}^{1}e^{-st}\mathrm{dt}=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{s}(e^{s}-e^{-s})\quad \mathrm{Re[s]>-\infty}$$

4．2　求下列象函数的原函数。

(1) $\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$　　$-3<\mathrm{Re}[s]<-1$;

(3) $\dfrac{s+1}{(s-2)(s+3)}$　　$\mathrm{Re}[s]>2$。

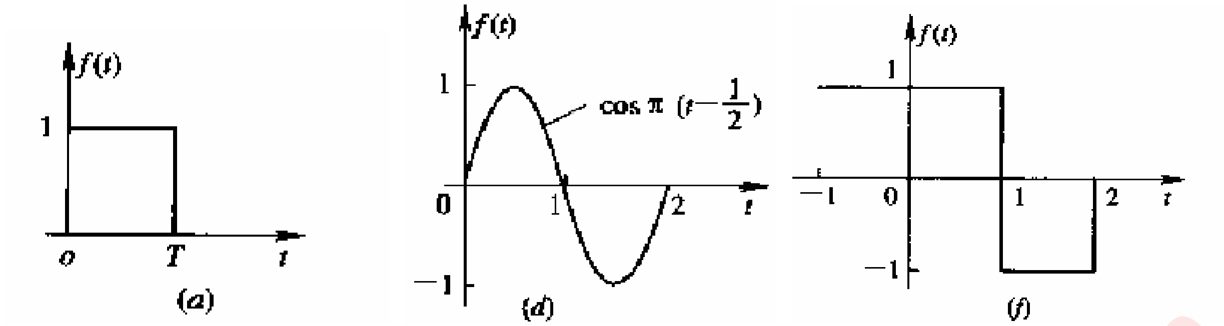
解：（1）$F(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\dfrac{1/2}{s+1}+\dfrac{1/2}{s+3}$，考虑到收敛域 $-3<\mathrm{Re[s]}<-1$

原函数为：$f(t)=\frac{1}{2}[e^{-3t}\varepsilon(t)-e^{-t}\varepsilon(-t)]$

（3）$F(s)=\dfrac{s+1}{(s-2)(s+3)}=\dfrac{3/5}{s-2}+\dfrac{2/5}{s+3}$，考虑到收敛域为 $\mathrm{Re[s]>2}$

原函数为：$f(t)=\left(\dfrac{3}{5}e^{2t}+\dfrac{2}{5}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)$

4．4　求题图 4．1 所示信号的单边拉氏变换。



解：

$$F_a(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{dt}=\int_{0^-}^{T} e^{-st}\mathrm{dt}=\frac{(1-e^{-sT})}{s} \qquad \mathrm{Re[s]>-\infty}$$

$$F_d(s)=\int_{0^-}^{2}\sin\pi t e^{-st}\mathrm{dt}=\frac{e^{-st}}{s^2+\pi^2}\left(-s\sin\pi t-\pi\cos\pi t\right)\Big|_{0-}^{2}=\frac{\pi(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2} \qquad \mathrm{Re[s]<-\infty}$$

$$F_f(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{dt}=\int_{0^-}^{1} e^{-st}\mathrm{dt}-\int_{1}^{2} e^{-st}\mathrm{dt}=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{0-}^{1}-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{s}\left[1-2e^{-s}+e^{-2s}\right] \quad \mathrm{Re[s]>-\infty}$$

4．5　求下列信号的单边拉氏变换。

(3) $e^{-2t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$；　　(9) $(\sin\pi t+1)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$；

(11) $\left[\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega_0 t\right]\varepsilon(t)$；　　(13) $\int_0^t \sin 2t\, dt$；

解：(3)　$f(t)=e^{-2t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]\leftrightarrow \mathrm{F(s)}=\left(\frac{1}{s+2}-\frac{e^{-2}}{s+2}e^{-s}\right)=\frac{1}{s+2}(1-e^{-(s+2)})$

(9)

$f(t)=(\sin\pi t+1)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$

$$\leftrightarrow \mathrm{F(s)}=\frac{1-e^{-2s}}{s}+\frac{1}{2j}\left(\frac{1-e^{-2(s-j\pi)}}{s-j\pi}-\frac{1-e^{-2(s+j\pi)}}{s+j\pi}\right)=\frac{1-e^{-2s}}{s}+\frac{1-e^{-2s}}{s^2+\pi^2}\pi=\left(\frac{1}{s}+\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right)(1-e^{-2s})$$

(11)　$f(t)=\left[\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega_0 t\right]\varepsilon(t)\leftrightarrow \mathrm{F(s)}=-\frac{\omega_0^2 s}{s^2+\omega_0^2}$

(13) $f(t)=\int_0^t \sin \pi t dt \leftrightarrow \frac{1}{s}F(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\right)$

4．6 已知 f(t)为因果信号，f(t)←→F(s)。求下列信号的象函数。

(1) $e^{-2t}f(2t)$； (2) $(t-2)^2 f\left(\frac{1}{2}t-1\right)$；

(3) $te^{-t}f(3t)$； (4) $f(at-b)$，$a>0$，$b>0$。

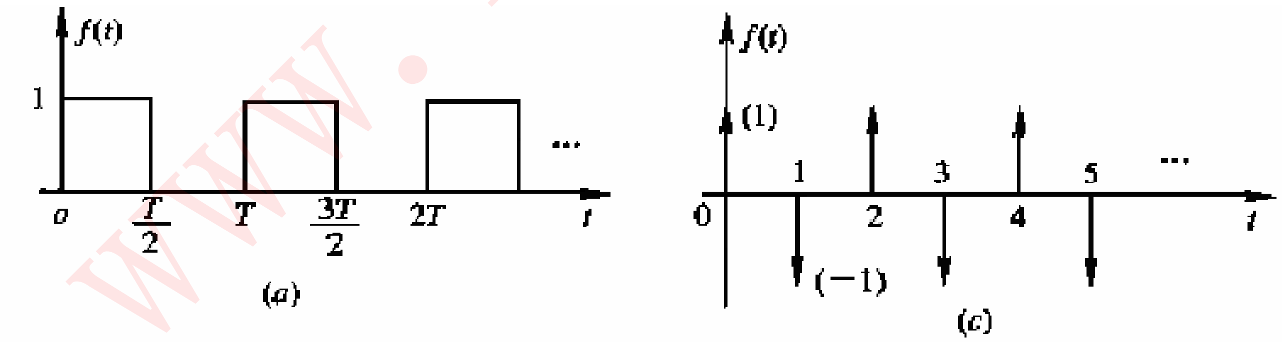
解：(1) $e^{-2t}f(2t)\leftrightarrow \frac{1}{2}F(\frac{s+2}{2})$，复频移性质、尺度变换

(2) $(t-2)^2 f(\frac{1}{2}t-1)=(t-2)^2 f\left[\frac{1}{2}(t-2)\right]\leftrightarrow 2F''(2s)e^{-2s}$，时移性质、尺度变换、S 域微分

(3) $te^{-t}f(3t)\leftrightarrow -\frac{1}{3}F'(\frac{s+1}{3})$，复频移性质、尺度变换、S 域微分

(4) $f(at-b)=f\left[a(t-\frac{b}{a})\right]\leftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}$，时移性质、尺度变换

4．7 题图 4．2 所示为从 t=0 起始的周期信号。求 f(t)的单边拉氏变换。



解：

(a) $f(t)=f_a(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$

$$f_a(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T/2)\leftrightarrow\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{T}{2}s})$$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{s}(1-e^{-\frac{T}{2}s})\frac{1}{1-e^{-sT}}=\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{s\left(1-e^{-sT}\right)}=\frac{1}{s\left(1+e^{-s\frac{T}{2}}\right)}$$

(b) $f(t)=f_c(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-2n)$ $\quad f_c(t)=\delta(t)-\delta(t-1)\leftrightarrow 1-e^{-s}$

$$\therefore F(s)=(1-e^{-s})\frac{1}{1-e^{-2s}}=\frac{1}{\left(1+e^{-s}\right)}$$

4．8 已知因果信号 f(t)的象函数为 F(s)，求下列 F(s)的原函数 f(t)的初值 f(0)和终值 f(∞)。

(2) $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+6s+10}$；

解：$f(0)=\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{s(s+3)}{s^2+6s+10}=1$

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+3)}{s^2+6s+10}=0$$

4．9 求下列单边拉氏变换的逆变换。

(1) $\dfrac{s^2+1}{s^2+5s+6}$； (9) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$；

(3) $\dfrac{2}{s(s^2+4)}$； (11) $\dfrac{1}{s(1+e^{-s})}$；

解：(1) $\dfrac{s^2+1}{s^2+5s+6}=1-\dfrac{5s+5}{s^2+5s+6}=1+\dfrac{5}{s+2}+\dfrac{-10}{s+3}\leftrightarrow f(t)=\delta(t)+5e^{-2t}\varepsilon(t)-10e^{-3t}\varepsilon(t)$

(3)

$$\frac{2}{s(s^2+4)}=\frac{1/2}{s}+\frac{-1/4}{s+j2}+\frac{-1/4}{s-j2}$$

$$\leftrightarrow f(t)=\frac{1}{2}\varepsilon(t)-\frac{2}{4}\cos 2t\varepsilon(t)=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\varepsilon(t)=\sin^2 t\varepsilon(t)$$

(9) $\frac{1}{(s^2+1)^2}=\frac{-j/4}{s-j}+\frac{j/4}{s+j}+\frac{-1/4}{(s-j)^2}+\frac{-1/4}{(s+j)^2}\leftrightarrow f(t)=\frac{1}{2}\cos(t-\pi/2)\varepsilon(t)-\frac{1}{2}t\cos t\varepsilon(t)$

(11) $\frac{1}{s(1+e^{-s})}=\frac{(1-e^{-s})}{s(1-e^{--2s})}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(1-e^{--2s})}\cdot(1-e^{-s})$

$$\leftrightarrow f(t)=\varepsilon(t)*\sum_{n=0}^{\infty}[\delta(t-2n)]*[\delta(t)-\delta(t-1)]=\varepsilon(t)*\sum_{n=0}^{\infty}[\delta(t-2n)-\delta(t-2n-1)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon(t-2n)-\varepsilon(t-2n-1)]$$

4．11 已知线性连续系统的输入 f(t)＝e^{-t}ε(t)时，零状态响应为

$y_f(t)=(e^{-t}-2e^{-2t}+3e^{-3t})\varepsilon(t)$，求系统的阶跃响应 g(t)。

解：$Y_f(s)=F(s)\cdot H(s)$ 而$Y_f(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$，$F(s)=\frac{1}{s+1}$

$$\therefore H(s)=\frac{Y_f(s)}{F(s)}=1-\frac{2(s+1)}{s+2}+\frac{3(s+1)}{s+3}=2+\frac{2}{s+2}+\frac{-6}{s+3}$$

当$f(t)=\varepsilon(t)$时$\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}$

$$Y_f(s)=\frac{1}{s}\left(2+\frac{2}{s+2}+\frac{-6}{s+3}\right)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

$$\therefore g(t)=(1-e^{-2t}+2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

4．17 已知某线性连续系统的输出 y1(t)和 y2(t)与输入 f(t)的关系方程为

$$\begin{cases} y_1'(t)+2y_1(t)-y_2(t)=f(t) \\ y_2'(t)+2y_2(t)-y_1(t)=0 \end{cases}$$

$f(t)=\varepsilon(t)$，$y_1(0^-)=2$，$y_2(0^-)=1$。求零输入响应 $y_{1x}(t)$、$y_{2x}(t)$和零状态响应 $y_{1f}(t)$、$y_{2f}(t)$。

解：对微分方程两边求 L 变换：

$$\begin{cases} sY_1(s)-y_1(0-)+2Y_1(s)-Y_2(s)=F(s) \\ sY_2(s)-y_2(0-)+2Y_2(s)-Y_1(s)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)Y_1(s)-Y_2(s)=F(s)+y_1(0-) \\ (s+2)Y_2(s)-Y_1(s)=y_2(0-) \end{cases}$$

解得：$Y_2(s)=\frac{1}{(s+2)^2-1}(F(s)+(s+2)y_2(0-)+y_1(0-))=\frac{F(s)}{(s+2)^2-1}+\frac{s+4}{(s+2)^2-1}=Y_{2f}(s)+Y_{2x}(s)$

$$Y_1(s)=\frac{(s+2)F(s)}{(s+2)^2-1}+\frac{2s+5}{(s+2)^2-1}=Y_{1f}(s)+Y_{1x}(s)$$

因为：$f(t)=\varepsilon(t)\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}$

$$Y_{2f}(s)=\frac{F(s)}{(s+2)^2-1}=\frac{1}{s(s^2+4s+3)}=\frac{1/3}{s}+\frac{-1/2}{(s+1)}+\frac{1/6}{(s+3)}$$

$$Y_{2x}(s)=\frac{s+4}{(s+2)^2-1}=\frac{3/2}{(s+1)}+\frac{-1/2}{(s+3)}$$

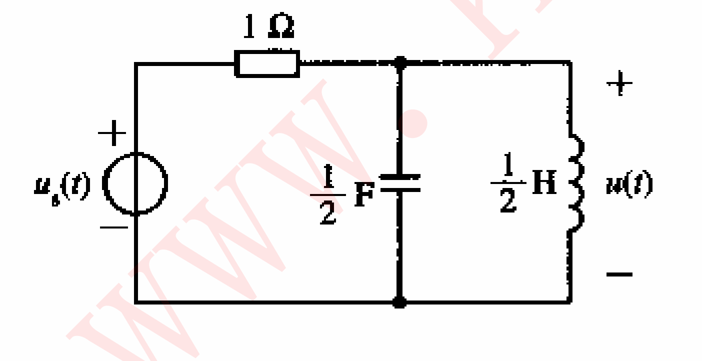
$$Y_{1f}(s)=\frac{(s+2)F(s)}{(s+2)^2-1}\frac{1}{s(s^2+4s+3)}=\frac{2/3}{s}+\frac{-1/2}{(s+1)}+\frac{-1/6}{(s+3)}$$

$$Y_{1x}(s)=\frac{2s+5}{(s+2)^2-1}=\frac{3/2}{(s+1)}+\frac{1/2}{(s+3)}$$

$$\therefore y_{1f}(t)=(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t})\varepsilon(t),\qquad y_{1x}(t)=(\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$y_{2f}(t)=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t})\varepsilon(t),\qquad y_{2x}(t)=(\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})\varepsilon(t)$$

4．19　题图 4.4 所示 RLC 系统，求电压 u(t)的冲激响应和阶跃响应。



题图 4.4

解：由电路，得：

$$U(s)=\frac{2s}{s^2+2s+4}U_s(s)$$

当 $u_s(t)=\delta(t)$ 时，$U(s)=H(s)=\frac{2s}{s^2+2s+4}=\frac{K_1}{s+1-j\sqrt{3}}+\frac{K_2}{s+1+j\sqrt{3}}$

$$K_1=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{j\pi/6},K_2=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-j\pi/6}$$

$$\therefore h(t)=\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-t}\cos(\sqrt{3}\mathrm{t}+\frac{\pi}{6})\varepsilon(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\mathrm{t}-\sin\sqrt{3}\mathrm{t}\right)\varepsilon(t)$$

当 $u_s(t)=\varepsilon(t)$ 时， $\mathrm{U}(s)=H(s)=\frac{2}{s^2+2s+4}=\frac{K_1}{s+1-j\sqrt{3}}+\frac{K_2}{s+1+j\sqrt{3}}$

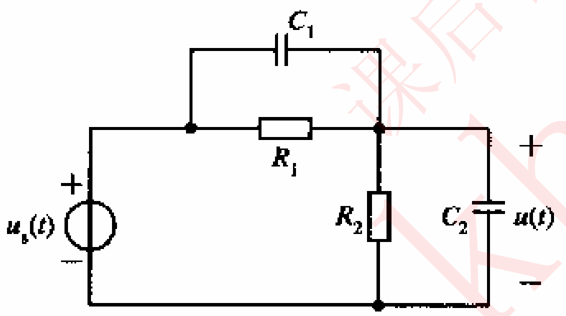
$$K_1=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-j\pi/2},K_2=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{j\pi/2}$$

$$\therefore g(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\cos(\sqrt{3}\mathrm{t}-\frac{\pi}{2})\varepsilon(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}\mathrm{t}\varepsilon(t)$$

4.23 RLC 系统如题图 4.8 所示。

(1) $R_1=6\ \Omega$，$R_2=3\ \Omega$，$C_1=C_2=1$ F，求电压 $u(t)$ 的冲激响应和阶跃响应；

(2) 若 $R_1C_1=R_2C_2$，求 $u(t)$ 的冲激响应和阶跃响应。



题图 4.8

解：（1）设由 R_1 与 C_1 并联所得阻抗为：$Z_1=\frac{R_1\frac{1}{sC_1}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}=\frac{R_1}{sC_1R_1+1}=\frac{6}{6s+1}$

设由 R_2 与 C_2 并联所得阻抗为：$Z_2=\frac{R_2\frac{1}{sC_2}}{R_2+\frac{1}{sC_2}}=\frac{R_2}{sC_2R_2+1}=\frac{3}{3s+1}$

$$\mathrm{U}(s)=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\mathrm{U}_s(s)=\frac{6s}{12s+3}\mathrm{U}_s(s)=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\frac{1}{s+1/4}\mathrm{U}_s(s)$$

$\therefore$冲激响应：$h(t)=\frac{1}{2}\delta(\mathrm{t})-\frac{1}{24}e^{-t/4}\varepsilon(t)$

阶跃响应：$g(t)=h(t)*\varepsilon(t)=\frac{1}{2}\varepsilon(\mathrm{t})-\frac{1}{6}\varepsilon(t)+\frac{1}{6}e^{-t/4}\varepsilon(t)=\frac{2}{6}\varepsilon(\mathrm{t})+\frac{1}{6}e^{-t/4}\varepsilon(t)$

(2) 当 $R_1C_1=R_2C_2$ 时：$\mathrm{U}(s)=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\mathrm{U}_s(s)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\mathrm{U}_s(s)$

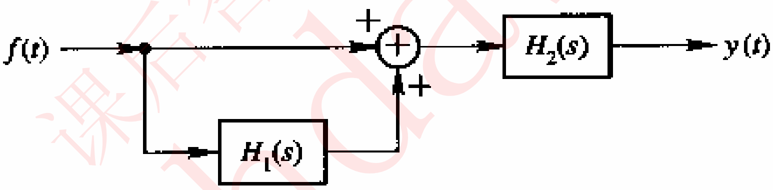
$\therefore$冲激响应：$h(t)=\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}\delta(\mathrm{t})$

阶跃响应：$g(t)=h(t)*\varepsilon(t)=\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}\varepsilon(t)$

4.25 线性连续系统如题图 4.10 所示。图中，$H_1(s)=-e^{-2s}$，$H_2(s)=\frac{1}{s}$。

(1) 求系统的冲激响应；

(2) 若 $f(t)=t\varepsilon(t)$，求零状态响应。



题图 4.10

解：(1) $\mathrm{Y}(s)=[1+H_1(s)]F(s)H_2(s)$

$\therefore H(s)=\frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{F(s)}}=[1+H_1(s)]H_2(s)=\frac{(1-e^{-2s})}{s}$

$h(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(\mathrm{t-2})$

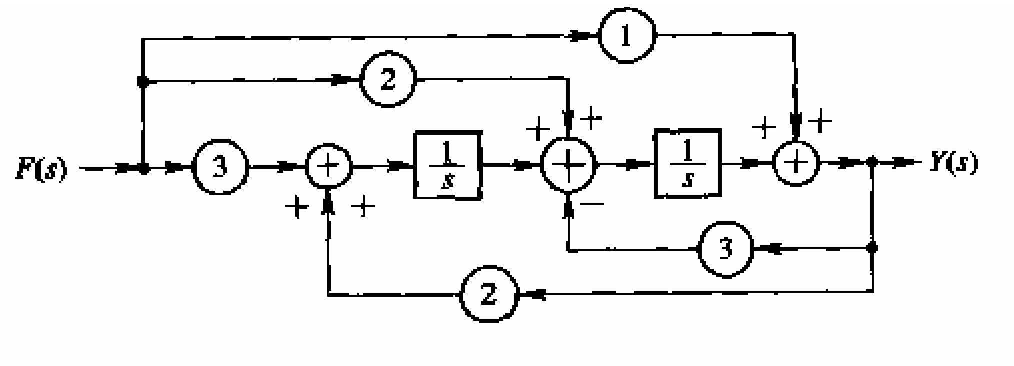
(2) $f(t)=t\varepsilon(t)$，$F(s)=\frac{1}{s^2}, \mathrm{Y_f}(s)=F(s)H(s)=\frac{(1-e^{-2s})}{s^3}$

$\therefore$零状态响应：$y_f(t)=\frac{1}{2}t^2\varepsilon(\mathrm{t})-\frac{1}{2}(t-2)^2\varepsilon(\mathrm{t-2})$

4．26 线性连续系统如题图 4．11(b)所示。

(1)写出描述系统输入输出关系的微分方程；

(2)画出系统的信号流图。



题图 4.11

解： (1) $\begin{cases} sX_1(s)=3F(s)+2Y(s) \\ sX_2(s)=X_1(s)+2F(s)-3Y(s) \\ Y(s)=X_2(s)+F(s) \end{cases}$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{3}{s}F(s)+\frac{2}{s}Y(s)\right)+\frac{1}{s}\left(2F(s)-3Y(s)\right)+F(s)$$

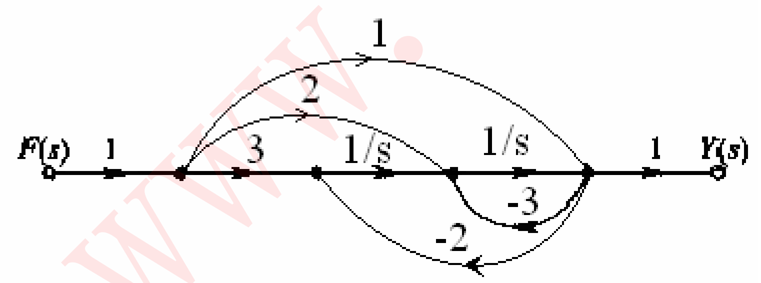
$$=\left(\frac{3}{s^2}+\frac{2}{s}+1\right)F(s)+\left(\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}\right)Y(s)$$

经整理得：$\therefore H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{s^2+2s+3}{s^2+3s-2}$

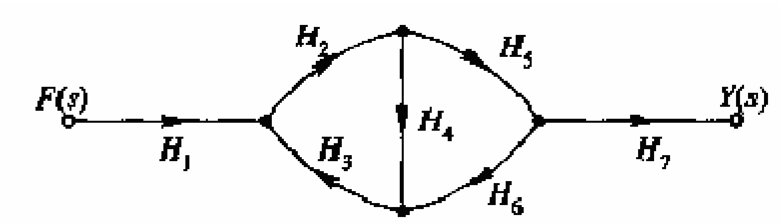
由此得描述系统输入输出关系的微分方程为：

$$y''(t)+3y'(t)-2y(t)=f''(t)+2f'(t)+3f(t)$$

(2) 系统的信号流图



4．27 线性连续系统的信号流图分别如题图 4．12(a)所示。求系统函数 H(s)。



(a)

解：该信号流图有两个环路，无不接触环路：

$L_1 = H_2H_3H_4, L_2 = H_2H_3H_5H_6$

有一条开路，开路的传输函数为：

$P_1 = H_1H_2H_5H_7, \Delta_1 = 1$

特征行列式为：$\Delta = 1 - H_2H_3H_4 - H_2H_3H_5H_6$

所以，系统函数为：

$$H(s) = \frac{\sum_i P_i\Delta_i}{\Delta} = \frac{H_1H_2H_5H_7}{1 - H_2H_3H_4 - H_2H_3H_5H_6}$$

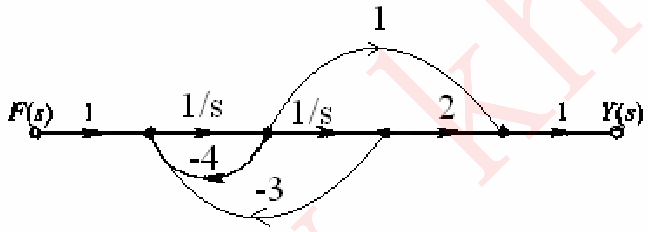
4.28 已知线性连续系统的系统函数如下。用直接形式信号流图模拟系统，画出系统的方框图。

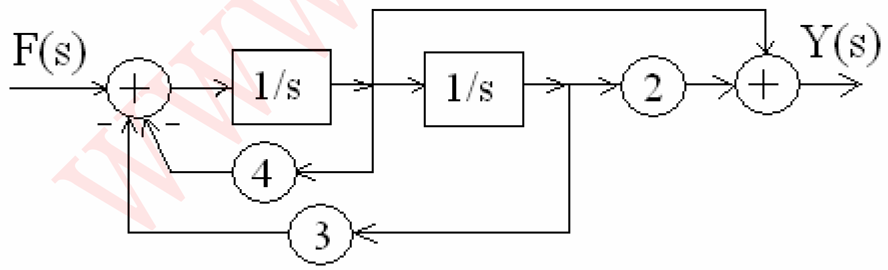
(1) $H(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}$;

(2) $H(s) = \dfrac{s^2+2s+1}{(s+2)(s^2+5s+6)}$;

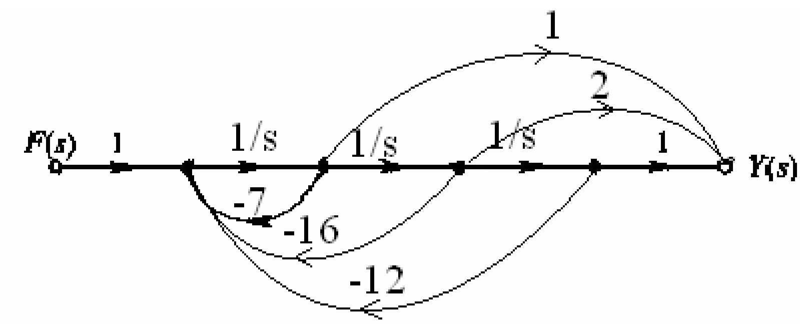
(3) $H(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+4)}$。

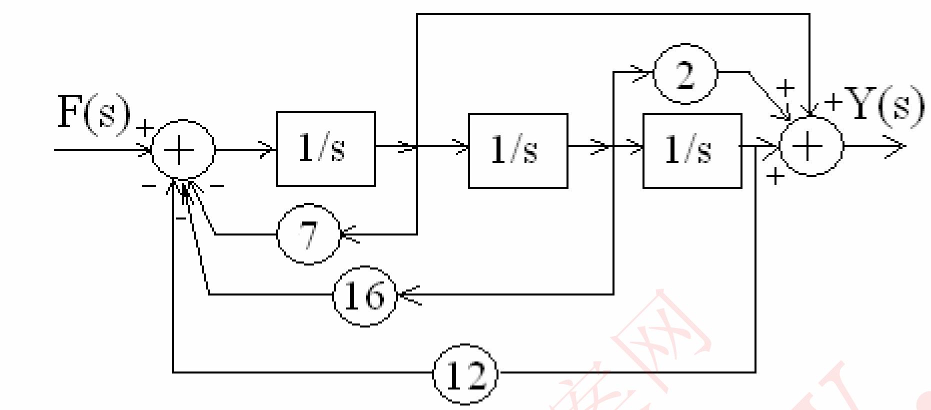
解：(1) $H(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \dfrac{s+2}{s^2+4s+3} = \dfrac{s^{-1}+2s^{-2}}{1-(-4s^{-1}-3s^{-2})}$



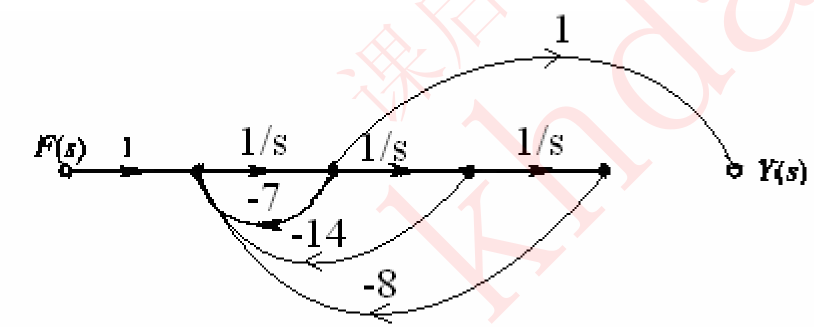


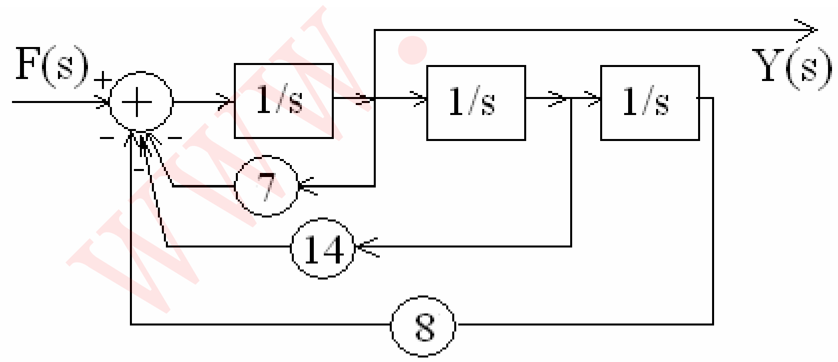
(2) $H(s) = \dfrac{s^2+2s+1}{(s+2)(s^2+5s+6)} = \dfrac{s^2+2s+1}{s^3+7s^2+16s+12} = \dfrac{s^{-1}+2s^{-2}+s^{-3}}{1-(-7s^{-1}-16s^{-2}-12s^{-3})}$





(3) $H(s)=\dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)(s+4)}=\dfrac{s^2}{s^3+7s^2+14s+8}=\dfrac{s^{-1}}{1+7s^{-1}+14s^{-2}+8s^{-3}}$

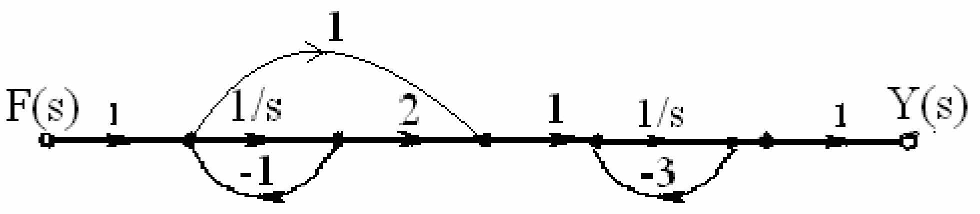




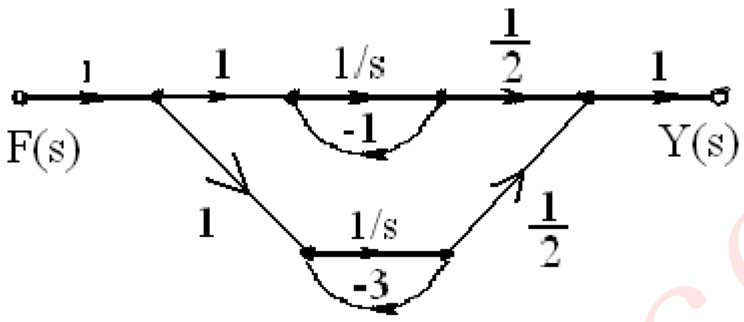
4．29 用级联形式和并联形式信号流图模拟习题 4．28 所述系统。只做题（1）。

解：$H(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)}=\dfrac{s+2}{s+1}\cdot\dfrac{1}{s+3}=\dfrac{1/2}{s+1}+\dfrac{1/2}{s+3}$

级联形式信号流图：



并联形式信号流图：

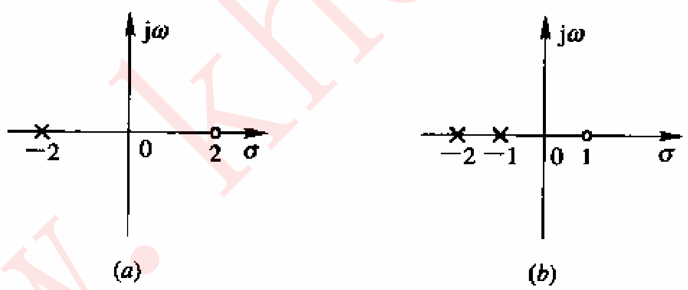


4.31 已知线性连续系统的系统函数 $H(s)$的零、极点分布如题图 4.13 所示。图中，"×"号表示极点，"∘"号表示零点。

(1) 若 $H(\infty)=1$，求图(a)对应系统的 $H(s)$；

(2) 若 $H(0)=-\frac{1}{2}$，求图(b)对应系统的 $H(s)$；

(3) 求系统频率响应 $H(j\omega)$，粗略画出系统幅频特性和相频特性曲线。



题图 4.13

解：(1) 由图知：P=−2，S=2，所以系统函数：

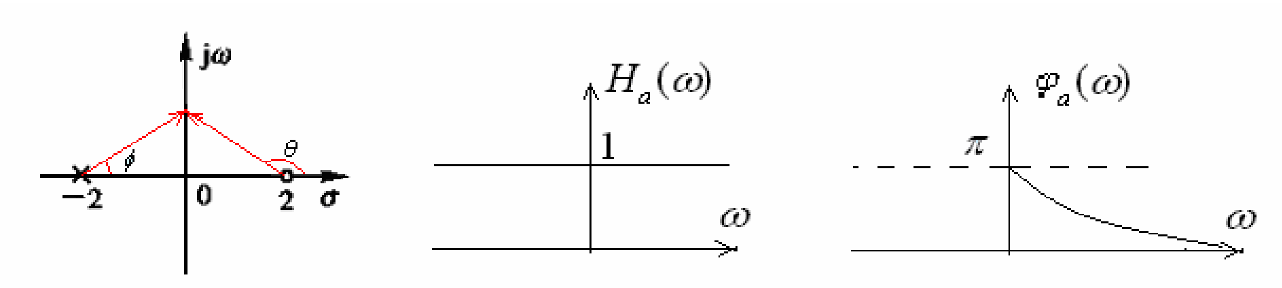
$$H_a(s)=A\frac{s-2}{s+2},\because H_a(\infty)=1,\therefore A=1,\text{因此，}H_a(s)=\frac{s-2}{s+2}$$

(2) 由图知：P_1=−2，P_2=−1，S=,1，所以系统函数：

$$H_b(s)=A\frac{s-1}{(s+1)(s+2)},\because H_b(0)=-1/2,\therefore A=1,\text{因此，}H_b(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

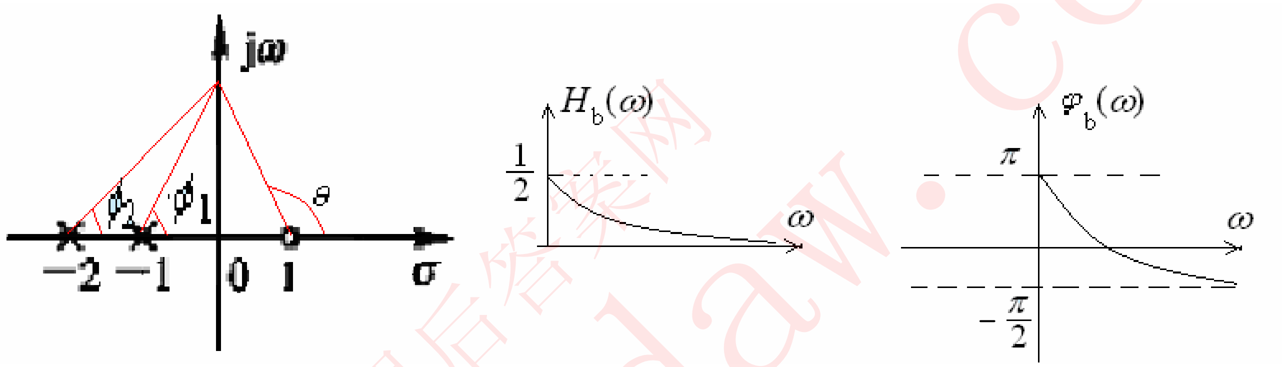
(3) 因为所有极点都落在左半平面，所以：

$$H_a(j\omega)=H_a(s)|_{s=j\omega}=\frac{j\omega-2}{j\omega+2},\therefore H_a(\omega)e^{j\varphi_a(\omega)}=\frac{Be^{j\theta}}{Be^{j\phi}}=e^{j\theta-\phi}$$



$$H_b(j\omega)=H_b(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega-1}{(j\omega+1)(j\omega+2)},$$

$$\therefore H_b(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)}=\frac{Ae^{j\theta}}{Ae^{j\phi_1}Be^{j\phi_2}}=\frac{1}{B}e^{j\theta-\phi_1-\phi_2},B=\sqrt{\omega^2+4}$$



4．32 已知线性连续系统的系统函数如下。检验各系统是否稳定。

（1）$H(s)=\dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$；（4）$H(s)=\dfrac{s+1}{s^4+2s^2+3s+2}$。

解：（1） $A_1(s)=s^2+3s+2$,罗斯阵列为：

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ c_2 & c_0 \\ d_2 & d_0 \end{array}$$

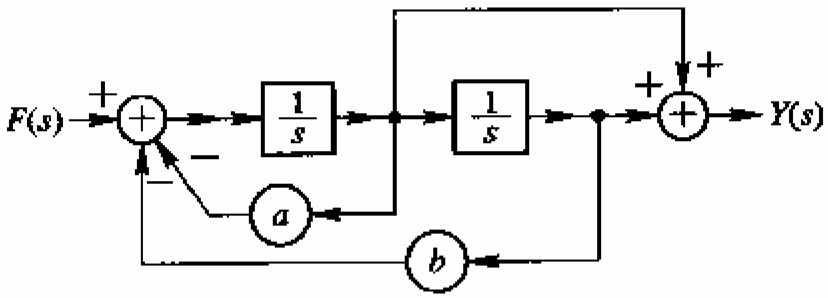
$$c_2=\frac{-1}{3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=2 \qquad c_0=\frac{-1}{3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$d_2=\frac{-1}{2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad d_0=\frac{-1}{2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

因为罗斯阵列的第一列元素都 大于“0”，所以系统稳定。

（4）因 $A_4(s)$的系数 $a_3=0$，所以系统不稳定。

4．33 线性连续因果系统如题图 4．14 所示。若要使系统稳定，求系数 a、b 的取值范围。



题图 4.14

解：由梅森公式，有：$H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+as+b}$，$\because A(s)=s^2+as+b$

要使 A(s)为霍尔维兹多项式，要求 a>0， b>0。排罗斯阵列：

1	b
a	0
c_2	c_0
d_2	d_0

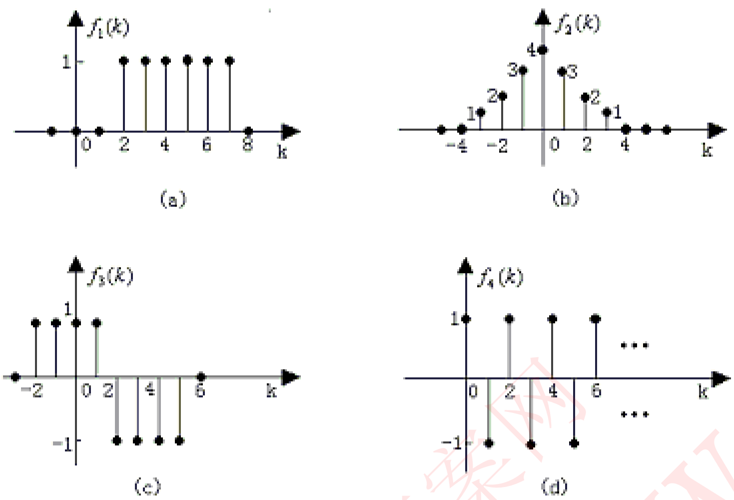
$$c_2=\frac{-1}{a}\begin{vmatrix}1 & b\\ a & 0\end{vmatrix}=b \quad c_0=\frac{-1}{a}\begin{vmatrix}1 & 0\\ a & 0\end{vmatrix}=0$$

$$d_2=\frac{-1}{b}\begin{vmatrix}a & 0\\ b & 0\end{vmatrix}=0 \quad d_0=\frac{-1}{b}\begin{vmatrix}a & 0\\ b & 0\end{vmatrix}=0$$

所以，要使系统稳定，系数 a、b 的取值范围为：a>0， b>0

第五章　习题解答（供参考）

5.3 画出题图 5.1 所示各序列的表达式。



题图 5.1

解：$(a)\ f_1(k)=\varepsilon(k-2)-\varepsilon(k-8)$

$$(b)\ f_2(k)=\begin{cases}k+4 & -4\le k\le 0\\ -k+4 & 0<k\le 4\end{cases}$$

$(c)\ f_3(k)=\varepsilon(k+2)-2\varepsilon(k-2)+\varepsilon(k-6)$

$(d)\ f_4(k)=(-1)^k\,\varepsilon(k)$

5.4 判断下列各序列是否为周期序列。如果是周期序列，试确定其周期。

（1）$f(k)=e^{j(\frac{k}{4}-\pi)}$；　　（2）$f(k)=\sin(\frac{8\pi k}{5}-1)$；

（3）$f(k)=\cos(\frac{k}{4})\cdot\sin(\frac{k\pi}{4})$；　　（4）$f(k)=\cos(\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4})+2\sin(\frac{\pi k}{4})$。

解：（1）$\Omega_0=\frac{1}{4},\frac{2\pi}{\Omega_0}=8\pi$ 为一无理数，故 f(k)为非周期序列。

(2) $\Omega_0 = \frac{8\pi}{5}, \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi\times 5}{8\pi} = \frac{5}{4}$ 为有理数，所以 f(k) 为周期序列，其周期为 5。

(3) $\Omega_{01} = \frac{1}{4}, \Omega_{02} = \frac{\pi}{4}$，由于 $2\pi/\Omega_{01}$ 为无理数，所以 f(k) 为非周期序列。

(4) $\Omega_{01} = \frac{\pi}{2}, \Omega_{02} = \frac{\pi}{4}$，而 $\frac{2\pi}{\Omega_{01}} = 4, \frac{2\pi}{\Omega_{02}} = 8$ 为有理数，所以 f(k) 为周期序列，其周期为 8。

5.6 计算下列卷积和 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$。

(1) $f_1(k) = \alpha^k \varepsilon(k), f_2(k) = \beta^k \varepsilon(k), 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, \alpha \neq \beta$；

(4) $f_1(k) = \varepsilon(k), f_2(k) = 2^k \varepsilon(-k)$；

解：(1) $f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i) = \sum_{i=0}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$

$$= \sum_{i=0}^{k} \alpha^i \beta^{(k-i)} = \beta^k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = \beta^k \frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{\beta-\alpha} (k \geq 0)$$

(4) $$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{(k-i)} = 2^k \frac{1}{1-1/2} = 2^{k+1} & k < 0 \\ \sum_{i=k}^{\infty} 2^{(k-i)} = 2^k \frac{2^{-k}}{1-1/2} = 2 & k \geq 0 \end{cases}$$

5.7 各序列的图形如图 5.2 所示，求下列卷积和。

(3) $[f_2(k) - f_1(k)] * f_3(k)$；(4) $f_1(k+2) * f_2(k-3)$；

(5) $f_1(k-2) * f_3(k+5)$。

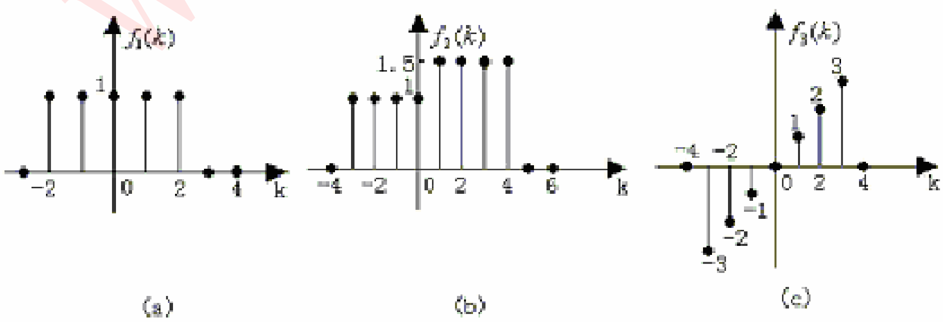


图 5.2

解：（3） $f_2(k)-f_1(k)=\{\ldots 0,1,0,0,\underset{k=0}{0},0.5,0.5,1.5,1.5,0,\ldots\}$

						1	0	0	0	0.5	0.5	1.5	1.5
							−3	−2	−1	0	1	2	3
						3	0	0	0	1.5	1.5	4.5	4.5
					2	0	0	0	1	1	3	3	
				1	0	0	0	0.5	0.5	1.5	1.5		
			0	0	0	0	0	0	0	0			
		−1	0	0	0	−0.5	−0.5	−1.5	−1.5				
	−2	0	0	0	−1	−1	−3	−3					
−3	0	0	0	−1.5	−1.5	−4.5	−4.5						
−3	−2	−1	0	−0.5	−0.5	−3	−8	−4	0	4	6	7.5	4.5

所以： $f(k)=\{\ldots 0,-3,-2,-1,0,-0.5,-0.5,\underset{k=0}{-3},-8,-4,0,4,6,7.5,4.5,0,\ldots\}$

（5）

				−3	−2	−1	0 序号为−5	1	2	3
					0	1	1	1	1	1 序号为4
				−3	−2	−1	0	1	2	3
			−3	−2	−1	0	1	2	3	
		−3	−2	−1	0	1	2	3		
	−3	−2	−1	0	1	2	3			
−3	−2	−1	0	1	2	3				
-3	-5	-6	-6	-5	0	5	6	$\underset{k=0}{6}$	5	3

所以： $f(k)=\{\ldots 0,-3,-5,-6,-6.,-5,0,5,6,\underset{k=0}{6},5,3,0,\ldots\}$

5.11 下列系统方程中，$f(k)$ 和 $y(k)$ 分别表示系统的输入和输出，试写出离散系统的传输算子 $H(E)$。

（1） $y(k+2)=ay(k+1)+by(k)+cf(k+1)+df(k)$；

（4） $y(k)+4y(k-1)+5y(k-3)=f(k-1)+3f(k-2)$

解：(1) $E^2y(k)-aEy(k)-by(k)=cEf(k)+df(k)$

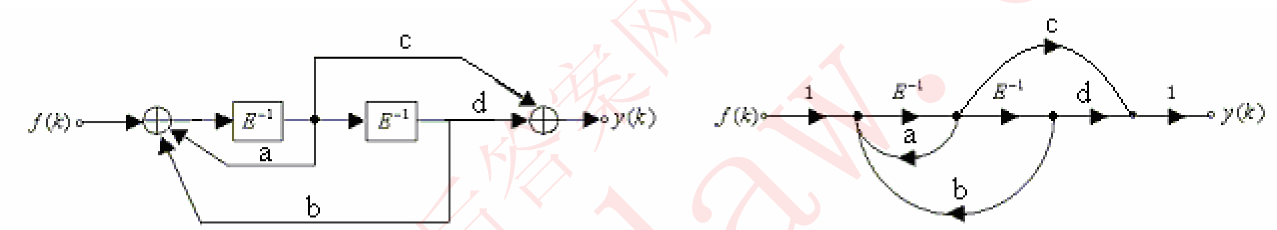
$$\therefore H(E)=\frac{y(k)}{f(k)}=\frac{cE+d}{E^2-aE-b}$$

(4) $y(k)+4E^{-1}y(k)+5E^{-3}y(k)=E^{-1}f(k)+3E^{-2}f(k)$

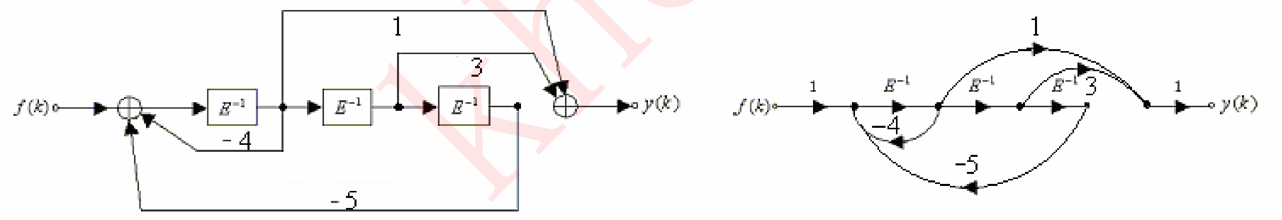
$$\therefore H(E)=\frac{y(k)}{f(k)}=\frac{E^{-1}+3E^{-2}}{1+4E^{-1}+5E^{-3}}=\frac{E^2+3E}{E^3+4E^2+5}$$

5．12 试画出题5.11 中各系统的模拟框图和信号流图表示。

解 (1)



(4)



5．15 求下列离散时间系统的零输入响应。

(1) $H(E)=\dfrac{E+1}{E^2+4E+4}, y_z(0)=0, y_z(1)=2$；

(2) $H(E)=\dfrac{E+2}{E^2+4E+4}, y_z(0)=1, y_z(1)=2$。

5.15 (1) $H(E)=\dfrac{E+1}{E^2+2E+2}, A(E)=E^2+2E+2=(E+1)^2+1=(E+1+j)(E+1-j)$

H（E）的两个极点为： $r_{1,2}=-1\pm j=\sqrt{2}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$

$\therefore y_x(k)=(\sqrt{2})^k\left(c_1\cos\frac{3k}{4}\pi+c_2\sin\frac{3k}{4}\pi\right)$，代入初始条件，得：

$$y_x(0)=c_1=0, y_x(1)=\sqrt{2}c_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\Rightarrow c_1=0, c_2=2$$

即：$y_x(k)=2(\sqrt{2})^k\sin\frac{3\pi}{4}k \quad k\geq 0$

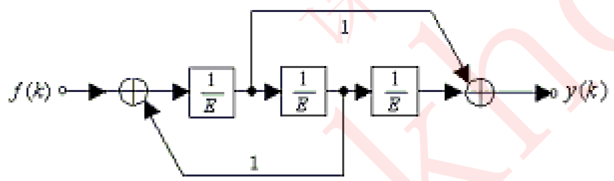
(2) $H(E)=\frac{E+2}{E^2+4E+4}, A(E)=E^2+4E+4=(E+2)^2$

$\therefore y_x(k)=(c_{10}+c_{11}k)(-2)^k$，代入初始条件，得：

$$y_x(0)=c_{10}=1, y_x(1)=(c_{10}+c_{11})\cdot(-2)=2\Rightarrow c_{10}=1, c_{11}=-2$$

即：$y_x(k)=(1-2k)(-2)^k\varepsilon(k)$

5.18 某离散时间系统的模拟框图如题图 5.5 所示，求该系统的单位响应和阶跃响应。



题图 5.5

解：（1）求单位响应：

由图：$y(k)=\frac{E^{-1}+E^{-3}}{1-E^{-2}}f(k), H(E)=\frac{E^{-1}+E^{-3}}{1-E^{-2}}=\frac{E+E^{-1}}{E^2-1}=H_0(E)(1+E^{-2})$

$$H_0(E)=\frac{E}{E^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{E}{E+1}-\frac{E}{E-1})\leftrightarrow h_0(k)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon(k)-(-1)^k\varepsilon(k)\right)$$

$$H_0(E)E^{-2}\leftrightarrow h_0(k)\big|_{k\to k-2}=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{k-2}\varepsilon(k-2)\right)$$

所以，系统的单位响应：

$$h(k)=\frac{1}{2}\left(1-(-1)^k\varepsilon(k)\right)+\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{k-2}\varepsilon(k-2)\right)\Rightarrow$$

$$h(k)=[1+(-1)^{k-1}]\varepsilon(k-1)-\delta(k-1)=[1-(-1)^{k}]\varepsilon(k)-\delta(k-1)$$

（2）求阶跃响应：

$$g(k)=\varepsilon(k)*h(k)=\varepsilon(k)*\left[\left(1-(-1)^{k}\varepsilon(k)\right)-\delta(k-1)\right]=\left(k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^{k}\right)\varepsilon(k)+\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$=\left(k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^{k}\right)\varepsilon(k)+\delta(k)$$

5.20 已知 LTI 离散系统的输入输出差分方程为

$$y(k)+0.1y(k-1)-0.3y(k-2)=11f(k-1)+22f(k-2)$$

试求：

（1） 系统的单位响应；

（2） 输入 $f(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-8)$ 时的零状态响应。

解：(1) 系统的单位响应：

$$H(E)=\frac{11E^{-1}+22E^{-2}}{1+0.1E^{-1}-0.3E^{-2}}=\frac{11E+22}{E^{2}+0.1E-0.3}=\frac{11E+22}{(E+0.6)(E-0.5)}=\left(\frac{10E}{E-0.5}-\frac{10E}{E+0.6}\right)(1+2E^{-1})$$

$$\Rightarrow h(k)=10\left(0.5^{k}-(-0.6)^{k}\right)\varepsilon(k)+20\left(0.5^{k-1}-(-0.6)^{k-1}\right)\varepsilon(k-1)$$

$$=\left(25\times0.5^{k-1}-14(-0.6)^{k-1}\right)\varepsilon(k-1)$$

（2）零状态响应：

$$y_f(k)=f(k)*h(k)=[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-8)]*\left[\left(25\times(0.5)^{k-1}-14\times(-0.6)^{k-1}\right)\varepsilon(k-1)\right]$$

$$=25\left(\frac{1-0.5^{k+1}}{1-0.5}\right)\varepsilon(k)\Big|_{k=k-1}-25\left(\frac{1-0.5^{k+1}}{1-0.5}\right)\varepsilon(k)\Big|_{k=k-9}-14\left(\frac{1-(-0.6)^{k+1}}{1+0.6}\right)\varepsilon(k)\Big|_{k=k-1}+14\left(\frac{1-(-0.6)^{k+1}}{1+0.6}\right)\varepsilon(k)\Big|_{k=k-9}$$

$$=\left(50-50(0.5)^{k}\right)\varepsilon(k-1)-\left(50-50(0.5)^{k-8}\right)\varepsilon(k-9)-8.75\left(1-(-0.6)^{k}\right)\varepsilon(k-1)+8.75\left(1-(-0.6)^{k-8}\right)\varepsilon(k-9)$$

经整理，得：

$$y_f(k)=[41.25-50(0.5)^{k}+8.75(-0.6)^{k}]\varepsilon(k-1)$$
$$-[41.25-50(0.5)^{k-8}]+8.75(-0.6)^{k-8}\varepsilon(k-9)$$

5.23 求下列差分方程所描述的离散系统的零输入响应、零状态响应和完全响应。

（1）$y(k+1)+2y(k)=f(k)$

$f(k)=e^{-k}\varepsilon(k), y_x(0)=0$

（3）$y(k)+5y(k-1)+6y(k-2)=f(k)-f(k-1)$

$f(k)=\varepsilon(k), y(0)=1, y(2)=-16$

解：(1)先求零输入响应：

$$Ey(k)+2y(k)=f(k)\Rightarrow H(E)=\frac{1}{E+2}\quad \therefore y_x(k)=c(-2)^k$$

代入初始条件，得：

$$y_x(0)=c=0$$

即，零输入响应：

$$y_x(k)=0\ k\geq 0$$

再求零状态响应：

$$H(E)=\frac{E}{E+2}\frac{1}{E}\leftrightarrow h(k)=(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)$$

$$y_f(k)=f(k)*h(k)=\left[e^{-k}\varepsilon(k)\right]*\left[(-2)^{k-1}\varepsilon(k-1)\right]=\left.\left(\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{k+1}-(-2)^{k+1}}{\frac{1}{e}+2}\right)\varepsilon(k)\right|_{k=k-1}$$

经整理，得：

$$y_f(k)=\frac{e}{2e+1}[e^{-k}-(-2)^k]\varepsilon(k-1)$$

完全响应：$y(k)=y_x(k)+y_f(k)=y_f(k)$

（3）先确定零输入响应：

$$y(k)+5E^{-1}y(k)+6E^{-2}y(k)=f(k)-E^{-1}f(k)\Rightarrow H(E)=\frac{1-E^{-1}}{1+5E^{-1}+6E^{-2}}=\frac{E^{-2}-E}{E^2+5E+6}=\frac{E^{-2}-E}{(E+2)(E+3)}$$

$$\therefore y_x(k)=\left(c_1(-2)^k+c_2(-3)^k\right)\varepsilon(k)$$

零状态响应：

$$H(E)=\frac{4E}{E+3}-\frac{3E}{E+2}\leftrightarrow h(k)=\left(4\times(-3)^k-3\times(-2)^k\right)\varepsilon(k)$$

$$y_f(k)=f(k)*h(k)=\varepsilon(k)*\left[\left(4\times(-3)^k-3\times(-2)^k\right)\varepsilon(k)\right]=\left(4\frac{1-(-3)^{k+1}}{1+3}-3\frac{1-(-2)^{k+1}}{1+2}\right)\varepsilon(k)$$

$$=\left(3\times(-3)^k-2\times(-2)^k\right)\varepsilon(k)$$

$$y(k)=y_x(k)+y_f(k)=\left(c_1(-2)^k+c_2(-3)^k\right)\varepsilon(k)+\left(3(-3)^k-2(-2)^k\right)\varepsilon(k)$$

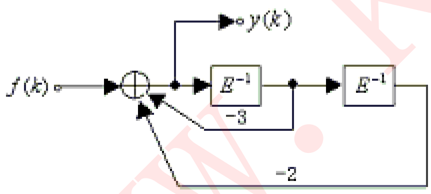
代入初始条件，得： $\begin{cases}y(0)=c_1+3+c_2-2=1\\ y(2)=4c_1+27+9c_2-8=16\end{cases}$， $\begin{cases}c_1=7\\ c_2=-7\end{cases}$

所以： $y_x(k)=7[(-2)^k-(-3)^k]\varepsilon(k)$

$$y_f(k)=[-2(-2)^k+3(-3)^k]\varepsilon(k)$$

完全响应： $y(k)=\left(5\times(-2)^k-4\times(-3)^k\right)\varepsilon(k)$

5.25 某 LTI 离散系统如题图 5.7 所示，已知激励 $f(k)=(2)^k\varepsilon(k)$，响应初始值 $y(0)=0$，$y(1)=2$，试求该系统的自由响应、强迫响应和完全响应。



题图 5.7

解： $y(k)=f(k)-3y(k-1)-2y(k-2)\Rightarrow f(k)=y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)$

$$\therefore H(E)=\frac{y(k)}{f(k)}=\frac{1}{1+3E^{-1}+2E^{-2}}$$

特征方程：$\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根：$\lambda_1=-2,\lambda_2=-1$

齐次解：$y_h(k)=\left(c_1(-2)^k+c_2(-1)^k\right)\varepsilon(k)$

由 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，可设特解：$y_p(k)=P_0 2^k\varepsilon(k)$ 代入差分方程，有：

$$2^k\varepsilon(k)=\left(P_0 2^k+3P_0 2^{k-1}+2P_0 2^{k-2}\right)\varepsilon(k)\Rightarrow P_0+\tfrac{3}{2}P_0+\tfrac{1}{2}P_0\Rightarrow P_0=1/3$$

$$\therefore y(k)=y_h(k)+y_p(k)=\left(c_1(-2)^k+c_2(-1)^k+\frac{1}{3}2^k\right)\varepsilon(k)$$

$$\begin{cases}y(0)=c_1+c_2+\dfrac{1}{3}=0\\ y(1)=-2c_1-c_2+\dfrac{2}{3}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-1\\ c_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

即：$y(k)=\left(-(-2)^k+\dfrac{2}{3}(-1)^k+\dfrac{1}{3}2^k\right)\varepsilon(k)$

自由响应：$\left[\dfrac{2}{3}(-1)^k-(-2)^k\right]\varepsilon(k)$；　强迫响应：$\dfrac{1}{3}(2)^k\varepsilon(k)$

第七章 习题解答（供参考）

7.1 用定义求下列信号的双边 Z 变换及收敛域。

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon(k-2)$； (4) $(-1)^k \varepsilon(-k)$；

解：(2) $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^k=\frac{\left(\frac{1}{2z}\right)^2}{1-\frac{1}{2z}}=\frac{1}{2z(2z-1)}$， $ROC:|z|>\frac{1}{2}$

(4) $F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{0}(-1)^k z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{0}\left(-\frac{1}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k=\frac{1}{1+z}$， $ROC:|z|<1$

7.2 用 Z 变换的性质和常用 Z 变换求下列信号的双边 Z 变换。

(2) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{3}\right)^{-k}\right]\varepsilon(k)$； (8) $2^{-k}\varepsilon(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\varepsilon(-k)$；

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}\varepsilon(k)$； (9) $k(k-1)\varepsilon(-k-1)$。

(6) $(-1)^k a^k \varepsilon(k-2)$；

解：(2) $\because \varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$， $|z|>1$ 由线性性和序列乘 a^k 性质：

$$F(z)=\frac{2z}{2z-1}+\frac{z/3}{\frac{z}{3}-1}=\frac{2z}{2z-1}+\frac{z}{z-3}=\frac{2z^2-z+2z^2-6z}{(2z-1)(z-3)}=\frac{4z^2-7z}{(2z-1)(z-3)},\quad |z|>3$$

$|z|>1/2 \qquad |z|>3$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}\varepsilon(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\frac{1}{9}\frac{3z}{3z-1}=\frac{z}{3(3z-1)}$， $|z|>1/3$

(6) $(-1)^k a^k \varepsilon(k-2)=(-a)^k\varepsilon(k-2)=(-a)^2(-a)^{k-2}\varepsilon(k-2)$

$$\leftrightarrow F(z)=a^2z^{-2}\frac{-z/a}{-\frac{z}{a}-1}=\frac{a^2}{z(z+a)},\quad |z|>|a|$$

(8) $2^{-k}\varepsilon(k)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\varepsilon(-k)$，由序列乘 a^k 性质、K 域反转、线性性：

$$\leftrightarrow F(z)=\frac{2z}{2z-1}+\frac{2z^{-1}}{2z^{-1}-1}=\frac{2z}{2z-1}+\frac{2}{2-z}=\frac{-2z^2+8z-2}{(2z-1)(2-z)},\qquad 1/2<|z|<2$$

(9) 由 Z 域微分性质的推论： $-\frac{1}{2!}k(k-1)\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^3}$

可得：$k(k-1)\varepsilon(-k-1)\leftrightarrow\frac{2z}{(z-1)^3}\qquad |z|<1$

7.5 已知双边 Z 变换为 $F(z)=\frac{2z}{(z-2)(z-3)(z-4)}$

(1) $|z|>4$，求原函数 $f(k)$；

(2) $|z|<2$，求原函数 $f(k)$；

(3) $3<|z|<4$，求原函数 $f(k)$。

解：$F(z)=\frac{A_1z}{z-2}+\frac{A_2z}{z-3}+\frac{A_3z}{z-4}$

其中：$A_1=\frac{2}{(z-3)(z-4)}\bigg|_{z=2}=1,\ A_2=\frac{2}{(z-2)(z-4)}\bigg|_{z=3}=-2,\ A_3=\frac{2}{(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=4}=1$

$$\frac{z}{z-2}\leftrightarrow 2^k\varepsilon(k)\quad |z|>2,\ \frac{z}{z-2}\leftrightarrow -2^k\varepsilon(-k-1)\quad |z|<2,$$
$$\frac{z}{z-3}\leftrightarrow 3^k\varepsilon(k)\quad |z|>3,\ \frac{z}{z-3}\leftrightarrow -3^k\varepsilon(-k-1)\quad |z|<3,$$
$$\frac{z}{z-4}\leftrightarrow 4^k\varepsilon(k)\quad |z|>4,\ \frac{z}{z-4}\leftrightarrow -4^k\varepsilon(-k-1)\quad |z|<4,$$

(1) 当 | z | >4 时：$f(k)=\left(2^k-2\times3^k+4^k\right)\varepsilon(k)$

(2) 当 | z | <2 时：$f(k)=-\left(2^k-2\times3^k+4^k\right)\varepsilon(-k-1)$

(3) 当 3< | z | <4 时：$f(k)=\left(2^k-2\times3^k\right)\varepsilon(k)-4^k\varepsilon(-k-1)$

7.7 设 $f_1(k)$、$f_2(k)$ 为因果序列，并且 $f_1(k)\longleftrightarrow F_1(z)$，$f_2(k)\longleftrightarrow F_2(z)$。证明

(1) $a^kf_1(k)*a^kf_2(k)=a^k[f_1(k)*f_2(k)]$；

(2) $k[f_1(k)*f_2(k)]=kf_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*kf_2(k)$。

证明：(1) $a^kf_1(k)*a^kf_2(k)=\sum_{i=0}^{k}a^if_1(i)a^{k-i}f_2(k-i)$

$$=\sum_{i=0}^{k}a^k f_1(i)f_2(k-i)=a^k\sum_{i=0}^{k}f_1(i)f_2(k-i)=a^k\left(f_1(k)*f_2(k)\right)$$

(2) $k\left(f_1(k)f_2(k)\right)=k\sum_{i=0}^{k}f_1(i)f_2(k-i)$

$$=\sum_{i=0}^{k}[(k-i)+i]f_1(i)f_2(k-i)=\sum_{i=0}^{k}i\times f_1(i)f_2(k-i)+\sum_{i=0}^{k}f_1(i)(k-i)\times f_2(k-i)$$
$$=kf_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*kf_2(k)$$

7.9 求下列 $F(z)$ 的单边 Z 逆变换：

(2) $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2\left(z+\dfrac{1}{2}\right)}$，$|z|>1$； (4) $F(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$，$|z|>1$；

(6) $F(z)=\dfrac{z-1}{z^2(z-2)}$，$|z|>2$；

解：(2) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{A_1}{(z-1)^2}+\dfrac{A_2}{z-1}+\dfrac{A_3}{z-1/2}=\dfrac{2/3}{(z-1)^2}+\dfrac{-4/9}{z-1}+\dfrac{4/9}{z-1/2}$

$F(z)=\dfrac{2/3}{(z-1)^2}z+\dfrac{-4/9}{z-1}z+\dfrac{4/9}{z-1/2}z$，由于|z|>1，所以：

$$f(k)=\left(\frac{2}{3}k-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\varepsilon(k)=\frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}k-1+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\varepsilon(k)$$

(4) $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{1}{(z+1)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}j}{z+j}-\dfrac{\frac{1}{2}j}{z-j}\Rightarrow F(z)=\dfrac{1}{2}j\left(\dfrac{z}{z+j}-\dfrac{z}{z-j}\right)$

由于|z|>1，所以：

$$f(k)=\frac{j}{2}\left((-j)^k-(j)^k\right)\varepsilon(k)=\frac{1}{2}j\left(e^{-j\frac{\pi}{2}k}-e^{j\frac{\pi}{2}k}\right)\varepsilon(k)=\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\varepsilon(k)$$

(6) $F(z)=\dfrac{z-1}{z^2(z-2)}=\left(z^{-2}-z^{-3}\right)\dfrac{z}{(z-2)}$

由 $|z|>2$，可得：

$$f(k)=\left((2)^k\varepsilon(k)\right)_{k=k-2}-\left((2)^k\varepsilon(k)\right)_{k=k-3}=2^{k-2}\varepsilon(k-2)-2^{k-3}\varepsilon(k-3)$$

7. 12 已知因果序列 $f(k)$ 的象函数 $F(z)$ 如下，求 $f(k)$ 的初值 $f(0)$、$f(1)$ 和终值 $f(\infty)$。

(1) $F(z)=\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)\left(z-\dfrac{1}{2}\right)}$，$|z|>1$； (3) $F(z)=\dfrac{z^{-1}+1}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}$，$|z|>1$。

解：(1) 由于 |z|>1，所以 f(k)为因果序列，

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+z+1}{(z-1)(z-1/2)}=1$$

$$f(1)=\lim_{z\to\infty}z[F(z)-f(0)]=\lim_{z\to\infty}\left[z\frac{z^2+z+1}{(z-1)(z-1/2)}-1\right]=\lim_{z\to\infty}\left[\frac{(5z+1)z}{2(z-1)(z-1/2)}\right]=\frac{5}{2}$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim_{z\to1}\frac{z^2+z+1}{(z-1/2)}=6$$

（2）由于 $|z|>1$，所以 $f(k)$为因果序列，

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}=1$$

$$f(1)=\lim_{z\to\infty}z[F(z)-f(0)]=\lim_{z\to\infty}\left[z\frac{1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}{1-0.5z^{-1}-0.5z^{-2}}\right]=1.5$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)F(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)(z^2+z)}{(z-1)(z+1/2)}=\frac{2}{1.5}=\frac{4}{3}$$

7.18 已知二阶离散系统的输入 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$时，零状态响应为

$$y_f(k)=[1-(1-k)2^k]\varepsilon(k)$$

（1）求描述离散系统的差分方程；

（2）已知 $f(k)=\varepsilon(k)$，$y(-1)=1$，$y(-2)=0$，求系统的完全响应 $y(k)$。

解：(1) $f(k)=(2)^k\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\dfrac{z}{z-2}$， $y_f(k)\leftrightarrow Y_f(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-2}+\dfrac{2z}{(z-2)^2}$

$$H(z)=\frac{Y_f(z)}{F(z)}=\frac{z-2}{z-1}-1+\frac{2}{z-2}=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{z}{z^2-3z+2}$$

所以，差分方程为： $y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=f(k+1)$

或： $y(k)-3y(k-1)+2y(k-2)=f(k-1)$

(2) 当 $f(k)=\varepsilon(k)\leftrightarrow F(z)=\dfrac{z}{z-1}$时，零状态响应为：

$$Y_f(z)=H(z)F(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}\times\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}=\frac{-z}{(z-1)^2}+\frac{-2z}{z-1}+\frac{2z}{z-2}$$

$$\leftrightarrow y_f(k)=-k\varepsilon(k)-2\varepsilon(k)+2^{k+1}\varepsilon(k)$$

零输入响应为： $y_x(k)=c_1\varepsilon(k)+c_2 2^k\varepsilon(k)$，代入初始条件：

$$\because y_x(-i)=y(-i),\therefore y_x(0)=3y_x(-1)-2y_x(-2)=3,\ y_x(1)=3y_x(0)-2y_x(-1)=7$$

$$\therefore\begin{cases}y_x(0)=c_1+c_2=3\\ y_x(1)=c_1+2c_2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=-1\\ c_2=4\end{cases}\Rightarrow y_x(k)=-\varepsilon(k)+4\times2^k\varepsilon(k)$$

$$y(k)=y_x(k)+y_f(k)=(-k-3+6\times 2^k)\varepsilon(k)$$

7.19 已知离散系统的初始状态为 $y_1(-1)=1$，输入为 $f_1(k)=\varepsilon(k)$时，完全响应 $y_1(k)=2$，$k\geq 0$；当初始状态为 $y_2(-1)=-1$，输入为 $f_2(k)=\frac{1}{2}k\varepsilon(k)$时，完全响应 $y_2(k)=(k-1)$，$k\geq 0$。求输入为 $f_3(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\varepsilon(k)$时的零状态响应。

解 由 $y(k)=y_x(k)+y_f(k)=y_x(k)+h(k)*f(k)$

当初始状态 $y(-1)=1$，输入 $f_1(k)=\varepsilon(k)$，其全响应 $y_1(k)=2\varepsilon(k)$；所以

$$y_1(k)=y_{x1}(k)+h(k)*\varepsilon(k)=2\varepsilon(k) \qquad (1)$$

当初始状态 $y(-1)=-1$，输入 $f_2(k)=0.5k\varepsilon(k)$，其全响应

$$y_1(k)=(k-1)\varepsilon(k)=y_2(k)$$

故有 $$y_2(k)=-y_{x1}(k)+h(k)*[0.5k\varepsilon(k)]=(k-1)\varepsilon(k) \qquad (2)$$

式(1)＋式(2)得

$$h(k)*\varepsilon(k)+h(k)*[0.5k\varepsilon(k)]=2\varepsilon(k)+(k-1)\varepsilon(k)$$
$$=\varepsilon(k)+k\varepsilon(k)$$

两边取 z 变换，得

$$\frac{z}{z-1}H(z)+0.5\frac{z}{(z-1)^2}H(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{(z-1)^2}$$

解得 $$H(z)=\frac{z}{z-0.5}$$

于是，当 $f_3(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$时，$F_3(z)=\frac{z}{z-0.5}$，有

$$Y_{3f}(z)=H(z)F_3(z)=\frac{z^2}{(z-0.5)^2}$$

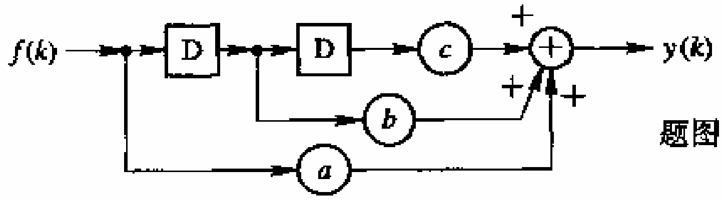
取逆 z 变换得

$$Y_{3f}(k)=(k+1)(0.5)^k\varepsilon(k)$$

7.23 题图 7.3 所示系统，D 为单位延迟器，当输入为

$$f(k)=\frac{1}{4}\delta(k)+\delta(k-1)+\frac{1}{2}\delta(k-2)$$

时，零状态响应 $y_f(k)$中 $y_f(0)=1$，$y_f(1)=y_f(3)=0$，确定系数 a、b、c。



题图 7.3

解：由图得：$y(k)=af(k)+bf(k-1)+cf(k-2)$

当 $f(k)=\frac{1}{4}\delta(k)+\delta(k-1)+\frac{1}{2}\delta(k-2)$时，有：

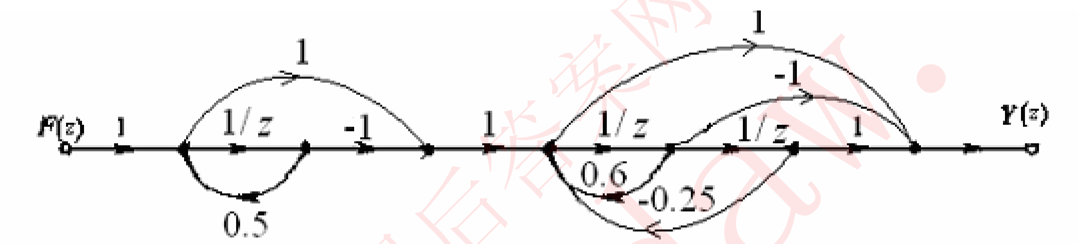
$$\begin{cases} y_f(0)=af(0)+bf(-1)+cf(-2)=\dfrac{a}{4}=1 \\ y_f(1)=af(1)+bf(0)+cf(-1)=a+\dfrac{b}{4}=0 \\ y_f(3)=af(3)+bf(2)+cf(1)=\dfrac{b}{2}+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-4a=-16 \\ c=-\dfrac{b}{2}=8 \end{cases}$$

7.28 已知因果离散系统的系统函数如下。分别用串联形式和并联形式信号流图模拟系统。

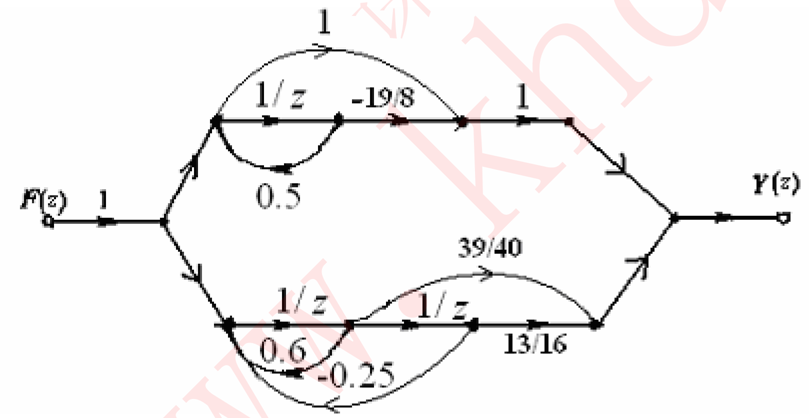
(2) $H(z)=\dfrac{(z-1)(z^2-z+1)}{(z-0.5)(z^2-0.6z+0.25)}$。

解：$H(z)=\dfrac{(z-1)(z^2-z+1)}{(z-0.5)(z^2-0.6z+0.25)}=\dfrac{(z-1)}{(z-0.5)}\dfrac{(z^2-z+1)}{(z^2-0.6z+0.25)}=\dfrac{z-2.375}{z-0.5}+\dfrac{0.975z+0.8125}{z^2-0.6z+0.25}$

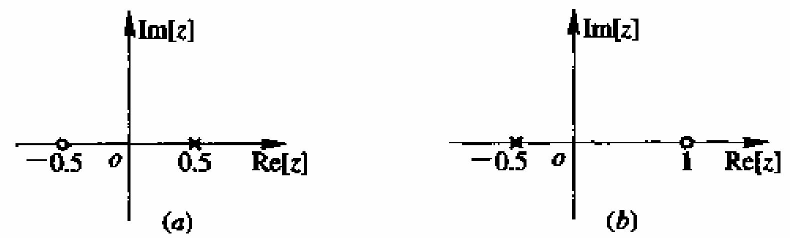
所以，其串联形式的信号流图：



其并联形式的信号流图：



7.29 已知因果离散系统的系统函数 $H(z)$ 的零、极点分布如题图 7.6 所示，并且 $H(0)=-2$。



(1) 求系统函数 $H(z)$；(2) 求系统的频率响应；(3) 粗略画出幅频响应曲线。

解：(1) 由零极点分布可知：

$H_a(z)=A\dfrac{(z+0.5)}{(z-0.5)}$ 由于 H（0）=-2，得 A=2。所以 $H_a(z)=2\dfrac{(z+0.5)}{(z-0.5)}$

$H_b(z)=A\dfrac{(z-1)}{(z+0.5)}$ 由于 H（0）=-2，得 A=1。所以 $H_b(z)=\dfrac{(z-1)}{(z+0.5)}$

（2）由于 H（）的极点落在单位圆内，所以系统的频率响应为：

$$H_a(e^{j\Omega T})=2\frac{(e^{j\Omega T}+0.5)}{(e^{j\Omega T}-0.5)}=\left|H_a(e^{j\Omega T})\right|e^{j\varphi_a(\Omega T)}$$

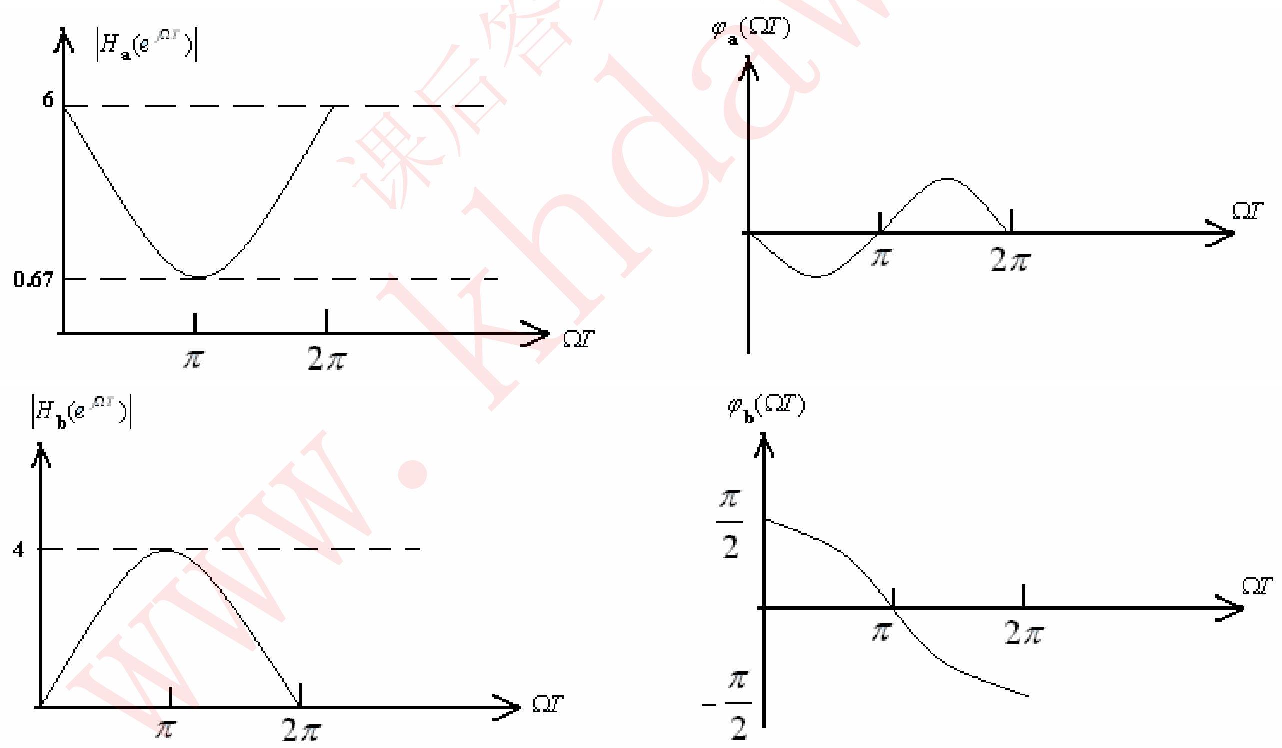
$$H_b(e^{j\Omega T})=\frac{(e^{j\Omega T}-1)}{(e^{j\Omega T}+0.5)}=\left|H_b(e^{j\Omega T})\right|e^{j\varphi_b(\Omega T)}$$

(3)

$$\left|H_a(e^{j\Omega T})\right|=2\sqrt{\frac{(\cos\Omega T+0.5)^2+\sin^2\Omega T}{(\cos\Omega T-0.5)^2+\sin^2\Omega T}},\varphi_a(\Omega T)=\arctan\left(\frac{\sin\Omega T}{\cos\Omega T+0.5}\right)-\arctan\left(\frac{\sin\Omega T}{\cos\Omega T-0.5}\right)$$

$$\left|H_b(e^{j\Omega T})\right|=2\sqrt{\frac{(\cos\Omega T-1)^2+\sin^2\Omega T}{(\cos\Omega T+0.5)^2+\sin^2\Omega T}},\varphi_b(\Omega T)=\arctan\left(\frac{\sin\Omega T}{\cos\Omega T-1}\right)-\arctan\left(\frac{\sin\Omega T}{\cos\Omega T+0.5}\right)$$

其大致的幅频响应曲线和相频响应曲线为：



7.33 已知因果离散系统的系统函数如下，为使系统稳定，K 的值应满足什么条件？

（1）$H(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+z+K}$；（2）$H(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-(K+1)z+2}$。

解：(1)先对 A(z)的系数进行朱里排列：

$$\begin{matrix} 1 & 1 & K \\ K & 1 & 1 \\ c_1 & c_0 & \\ c_0 & c_1 & \end{matrix}$$ ，其中：$c_1 = \begin{vmatrix} 1 & K \\ K & 1 \end{vmatrix} = 1 - K^2$，$c_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ K & 1 \end{vmatrix} = 1 - K$

按照朱里准则：

$$A(1) = 2 + K > 0 \Rightarrow K > -2$$

$$(-1)^2 A(-1) = K > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$a_2 = 1 > |a_0| = |K| \Rightarrow |K| < 1$$

$$c_1 = 1 - K^2 > |c_0| = |1 - K| \Rightarrow |K| < 1$$

所以，当 0<K<1 时，系统稳定。

(2)先对 A(z)的系数进行朱里排列：

$$\begin{matrix} 2 & -(K+1) & 2 \\ 2 & -(K+1) & 2 \\ c_1 & c_0 & \\ c_0 & c_1 & \\ d_0 & & \end{matrix}$$ ，其中：$c_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$，$c_0 = \begin{vmatrix} 2 & -(K+1) \\ 2 & -(K+1) \end{vmatrix} = 0$，$d_0 = 0$

按照朱里准则：

$$A(1) = 2 - (K+1) + 2 > 0 \Rightarrow K < 3$$

$$(-1)^2 A(-1) = 2 + (K+1) + 2 > 0 \Rightarrow K > -5$$

所以，当-5<K<3 时，系统稳定。

第八章　习题解答（供参考）

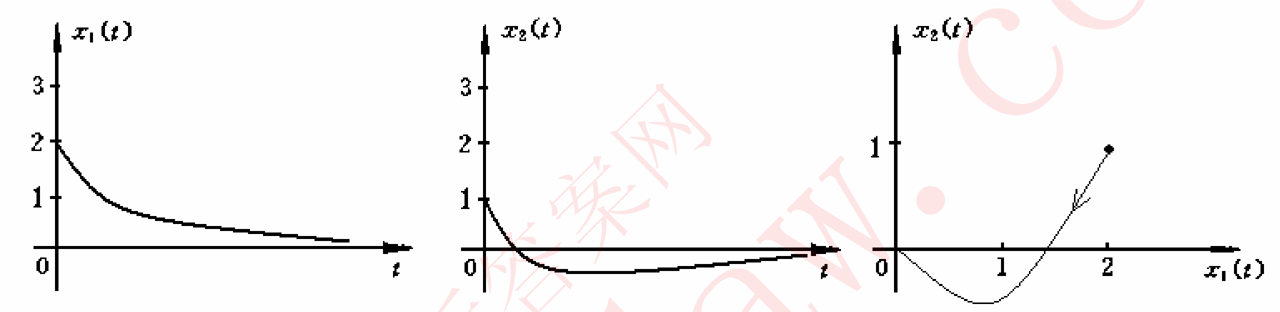
8.3 已知二阶系统状态矢量

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{-t}-e^{-3t}\\-3e^{-t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}$$

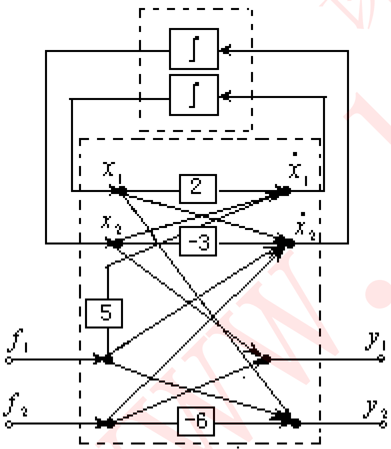
$$x(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

试画出 $x_1(t)$、 $x_2(t)$ 波形图和 $x(t)$ 的状态轨迹。

解：



8.6 系统状态模型框图如题图 8.4 所示，试用矩阵形式列出系统的状态空间方程。

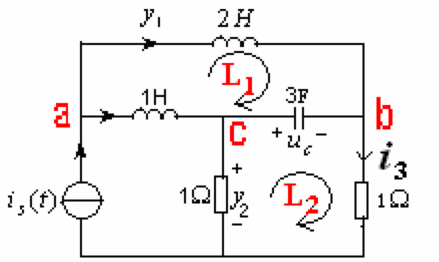


题图 8.4

解：∵ $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=2x_1(t)+x_2(t)+5f_1(t)\\\dot{x}_2(t)=x_1(t)-3x_2(t)+f_1(t)+f_2(t)\end{cases}$　　$\begin{cases}y_1(t)=x_2(t)+f_2(t)\\y_2(t)=x_1(t)+f_1(t)-6f_2(t)\end{cases}$

$$\therefore\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{bmatrix}$$

8.11 写出题图 8.9 所示网络的状态空间方程（以 y_1、y_2 为输出）。



题图 8.9 (a)

解：对节点 a ：$y_1(t)+i_{L1}(t)=i_s(t)$　　　(1)

回路 L_1 ：$2\dot{y}_1(t)-\dot{i}_{L1}(t)-u_c(t)=0$，将 $y_1(t)=i_s(t)-i_{L1}(t)$ 代入，有：

$$2\dot{i}_s(t)-3\dot{i}_{L1}(t)-u_c(t)=0 \qquad (2)$$

对节点 b ：$i_3(t)=y_1(t)+3\dot{u}_c(t)=i_s(t)-i_{L1}(t)+3\dot{u}_c(t)$

回路 L_2 ：$y_2(t)=u_c(t)+i_3(t)=u_c(t)+3\dot{u}_c(t)+i_s(t)-i_{L1}(t)$　　　(3)

对节点 c ：$i_{L1}(t)=y_2(t)+3\dot{u}_c(t)=u_c(t)+6\dot{u}_c(t)+i_s(t)-i_{L1}(t)$　　　(4)

$$\therefore\begin{cases}\dot{i}_{L1}(t)=-\dfrac{1}{3}u_c(t)+\dfrac{2}{3}\dot{i}_s(t)\\ \dot{u}_c(t)=\dfrac{1}{3}i_{L1}(t)-\dfrac{1}{6}u_c(t)-\dfrac{1}{6}i_s(t)\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1(t)=-i_{L1}(t)+i_s(t)\\ y_2(t)=\dfrac{1}{2}u_c(t)+\dfrac{1}{2}i_s(t)\end{cases}$$

矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_{L1}(t)\\ \dot{u}_c(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L1}(t)\\ u_c(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{6}\end{bmatrix}i_s(t)+\begin{bmatrix}\dfrac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}\dot{i}_s(t)\qquad\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L1}(t)\\ u_c(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}i_s(t)$$

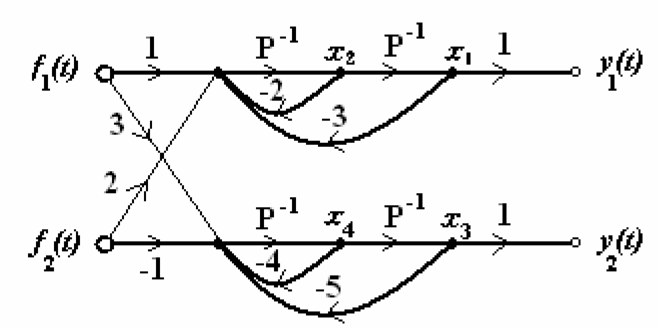
8.13 已知描述线性时不变连续时间系统的微分方程为

$$y_1^{(2)}(t)+2y_1^{(1)}+3y_1(t)=f_1(t)+2f_2(t)$$

$$y_2^{(2)}(t)+4y_2^{(1)}+5y_2(t)=3f_1(t)-f_2(t)$$

求该系统的状态空间方程。

解：算子方程为：$\begin{cases}(P^2+2P+3)y_1(t)=f_1(t)+2f_2(t)\\ (P^2+4P+5)y_2(t)=3f_1(t)-f_2(t)\end{cases}$，信号流图为：



所以，状态空间方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\ -3&-2&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&-5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\ 1&2\\ 0&0\\ 3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ 0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\ 0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$$

8.16 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2\\ -3&4\end{bmatrix}$，求 A^{123}。

解：矩阵 A 的特征方程：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\ 3&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

特征根：$\lambda_1=1,\ \ \lambda_2=2$ ，对特征根 $\lambda_1=1$，其特征向量为：$X_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

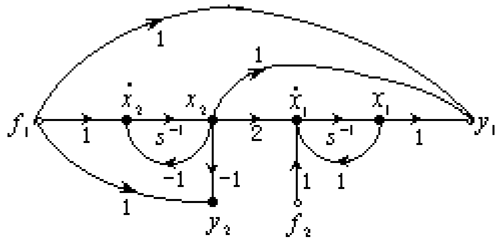
对特征根 $\lambda_2=2$，其特征向量为：$X_2=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\ 1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\ 0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\ 1&3\end{bmatrix}^{-1}$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\ 1&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\ -1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{123}=P\Lambda^{123}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\ 1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\ 0&2\end{bmatrix}^{123}\begin{bmatrix}3&-2\\ -1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\ 1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\ 0&2^{123}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\ -1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\times2^{123}\\ 1&3\times2^{123}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\ -1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-2^{124}&-2+2^{124}\\ 3-3\times2^{123}&-2+3\times2^{123}\end{bmatrix}$$

8.21 已知系统的信号流图表示如题图 8.11 所示，初始状态 $x_1(0^-)=1, x_2(0^-)=-1$，输入 $f_1(t)=\varepsilon(t), f_2(t)=\delta(t)$。求系统的输出响应 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$。



题图 8.11

解：由信号流图，得状态空间方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}$$

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，特征方程：$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

特征根：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$e^{At}=\beta_0 I+\beta_1 A$，由

$$\begin{cases}e^{t}=\beta_0+\beta_1\\ e^{-t}=\beta_0-\beta_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta_0=\dfrac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\\ \beta_1=\dfrac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(t)=e^{At}=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

所以，零输入分量：$y_x(t)=C\varphi(t)x(0^-)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}\\ 0 & -e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ e^{-t}\end{bmatrix}$

零状态分量：$y_f(t)=[C\varphi(t)B+D\delta(t)]*f(t)=\left[\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta(t) & 0\\ 0 & \delta(t)\end{bmatrix}\right]*\begin{bmatrix}\varepsilon(t)\\ \delta(t)\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\delta(t)+e^{t} & e^{t}\\ \delta(t)-e^{-t} & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\varepsilon(t)\\ \delta(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{t}\varepsilon(t)\\ e^{-t}\varepsilon(t)\end{bmatrix}$$

系统的输出响应：$[y(t)] = y_x(t) + y_f(t) = \begin{bmatrix} 2e^{t}\varepsilon(t) \\ 2e^{-t}\varepsilon(t) \end{bmatrix}$

8.23 已知线性时不变系统的状态转移矩阵为

(1) $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & \frac{2}{3}e^{t} - \frac{2}{3}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

试分别用两种方法求出系统状态方程的系数矩阵 A。

解：方法一： $\varphi(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$

$$\therefore (sI - A)^{-1} = L[\varphi(t)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right) \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right) \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}^{-1} = (s-1)(s+2)\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

所以，$A = sI - \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

方法二： 由状态转移矩阵的性质：$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \quad \varphi(0) = I$

$$\Rightarrow A = \dot{\varphi}(t)\big|_{t=0} = \begin{bmatrix} e^{t} & \frac{2}{3}\left(e^{t} + 2e^{-2t}\right) \\ 0 & -2e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

8.25 用 S 域法解题 8.21。

解：由信号流图，得状态空间方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

系统的预解矩阵：

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s-1 & -2\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 2\\ 0 & s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s-1)} & \frac{2}{(s-1)(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{(s+1)}\end{bmatrix}$$

系统函数矩阵：

$$H(s)=C\Phi(s)B+D=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{(s-1)} & \frac{2}{(s-1)(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{(s+1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{(s-1)} & \frac{1}{(s-1)}\\ 1-\frac{1}{(s+1)} & 0\end{bmatrix}$$

所以，零输入分量：

$$[y_x(t)]=L^{-1}[C\Phi(s)x(0^-)]=L^{-1}\left[\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+1)}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ e^{-t}\end{bmatrix}$$

零状态分量：$[y_f(t)]=L^{-1}[H(s)F(s)]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{2}{s-1}\\ \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{t}\varepsilon(t)\\ e^{-t}\varepsilon(t)\end{bmatrix}$

系统的输出响应：$[y(t)]=[y_x(t)]+[y_f(t)]=\begin{bmatrix}2e^{t}\varepsilon(t)\\ 2e^{-t}\varepsilon(t)\end{bmatrix}$

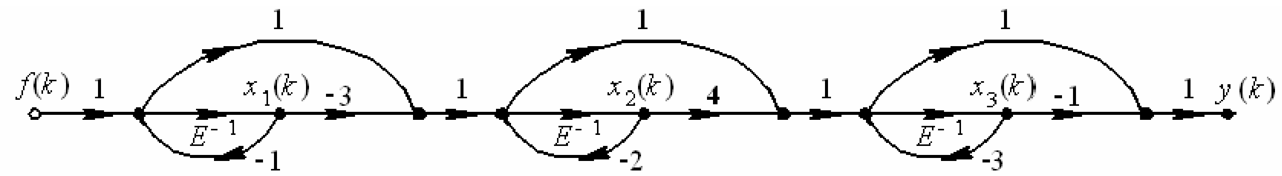
8.28 已知离散时间系统的传输算子为

$$H(E)=\frac{E^3-13E+12}{E^3+6E^2+11E+6}$$

试分别画出系统的级联和并联形式的信号流图表示，并建立相应的状态空间方程。

解：$H(E)=\dfrac{E^3-13E+12}{E^3+6E^2+11E+6}=\dfrac{(E-3)(E+4)(E-1)}{(E+1)(E+2)(E+3)}=1+\dfrac{12}{E+1}-\dfrac{30}{E+2}+\dfrac{12}{E+3}$

级联形式的信号流图：



由信号流图，得状态空间方程为：

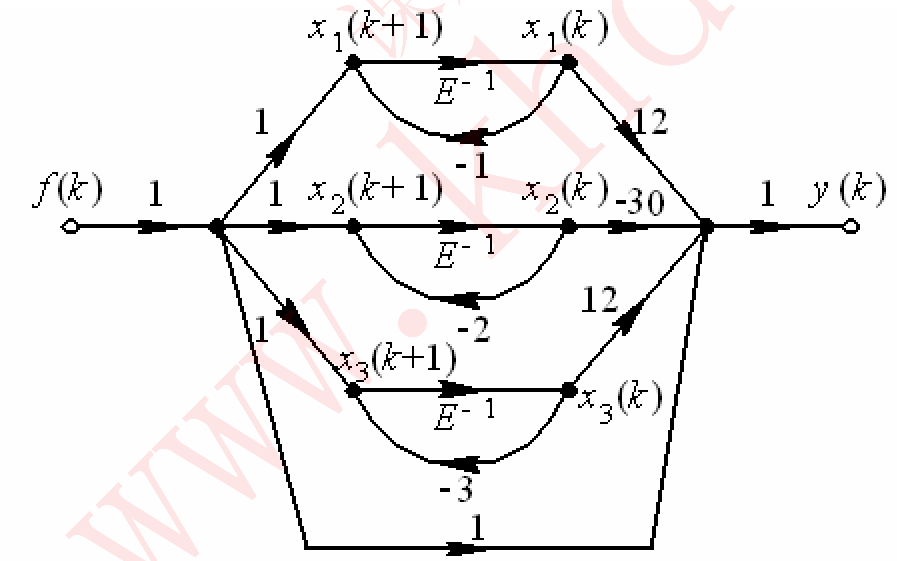
$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) + f(k) \\ x_2(k+1) = -3x_1(k) + x_1(k+1) - 2x_2(k) = -4x_1(k) - 2x_2(k) + f(k) \\ x_3(k+1) = -4x_2(k) + x_2(k+1) - 3x_3(k) = -4x_1(k) - 6x_2(k) - 3x_3(k) + f(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_3(k+1) - x_3(k) = -4x_1(k) - 6x_2(k) - 4x_3(k) + f(k)$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + [1] f(t)$$

并联形式的信号流图:



由信号流图，得状态空间方程为：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) + f(k) \\ x_2(k+1) = -2x_2(k) + f(k) \\ x_3(k+1) = -3x_3(k) + f(k) \end{cases}$$

$$y(k) = 12x_1(k) - 30x_2(k) + 12x_3(k) + f(k)$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 12 & -30 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + [1] f(t)$$

8.33 已知离散时间系统的状态空间方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + [1] f(k)$$

若系统的初始状态 $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$，输入 $f(k) = \varepsilon(k)$，求该系统的输出 $y(k)$ 。

解:用时域解法， $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$, $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & 0 \\ -1/4 & \lambda - 1/4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1/2)(\lambda - 1/4)$

特征根：$\lambda_1 = 1/2$，$\lambda_2 = 1/4$，$A^{kt} = \beta_0 I + \beta_1 A$，由：
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \beta_0 + \frac{1}{2}\beta_1 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^k = \beta_0 + \frac{1}{4}\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ \beta_1 = 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(k) = A^k = \left(2\left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 \\ (1/2)^k - (1/4)^k & (1/4)^k \end{bmatrix}$$

所以，零输入分量：$y_x(k) = C\varphi(k)x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/2)^k & 0 \\ (1/2)^k - (1/4)^k & (1/4)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^k \varepsilon(k)$

零状态分量：

$$y_f(k) = [C\varphi(k-1)B + D\delta(k)] * f(k) = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/2)^{k-1} & 0 \\ (1/2)^{k-1} - (1/4)^{k-1} & (1/4)^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta(k) \right] * \varepsilon(k)$$

$$= \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \delta(k) \right] * \varepsilon(k) = \varepsilon(k) + 3 \times 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]\varepsilon(k) - \frac{4}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

系统的输出响应：$y(k)=y_x(k)+y_f(k)=\left[\frac{17}{3}-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\varepsilon(k)$

8.36 用 Z 域分析法求解题 8.33。

解：$A=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}, D=1$

计算 Z 状态转移矩阵：

$$\Phi(z)=(zI-A)^{-1}z=\begin{bmatrix}z-1/2 & 0\\ -1/4 & z-1/4\end{bmatrix}^{-1}z=\frac{z}{(z-1/2)(z-1/4)}\begin{bmatrix}z-1/4 & 0\\ 1/4 & z-1/4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{z}{z-1/2} & 0\\ \dfrac{z/4}{(z-1/2)(z-1/4)} & \dfrac{z}{z-1/4}\end{bmatrix}$$

计算 Z 系统函数矩阵：$y_x(k)=C\varphi(k)x(0)=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1/2)^k & 0\\ (1/2)^k-(1/4)^k & (1/4)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{4}\right)^k\varepsilon(k)$

$$H(z)=Cz^{-1}\Phi(z)B+D=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(z-1/2)(z-1/4)}\begin{bmatrix}z-1/4 & 0\\ 1/4 & z-1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1$$

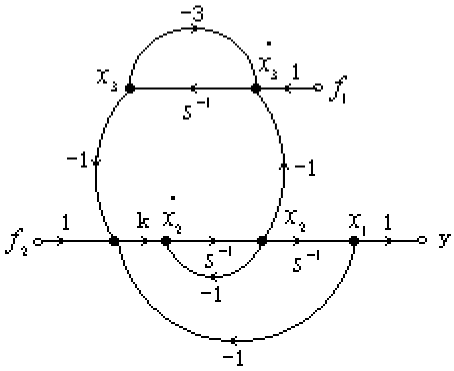
$$=1+\frac{2z-1/4}{(z-1/2)(z-1/4)}$$

所以，系统的输出响应：$y(k)=Z^{-1}[C\Phi(z)x(0)]+Z^{-1}[H(z)F(z)]$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}Z^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{z}{z-1/4}\end{bmatrix}+Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\left[1+\frac{2z-1/4}{(z-1/2)(z-1/4)}\right]\right]$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^k\varepsilon(k)+\left[\frac{17}{3}-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\varepsilon(k)=\left[\frac{17}{3}-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\varepsilon(k)$$

8.37 已知线性系统信号流图表示如题图 8.15 所示，试确定系统保持稳定时增益 K 允许的取值范围。



题图 8.15

解：由信号流图，得状态方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=K(-x_1(t)-x_3(t)+f_2(t))-x_2(t)=-Kx_1(t)-x_2(t)-Kx_3(t)+Kf_2(t)\\ \dot{x}_3(t)=-x_2(t)-3x_3(t)+f_1(t)\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -K & -1 & -K\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix}，\ |sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ K & s+1 & K\\ 0 & 1 & s+3\end{vmatrix}=s^3+4s^2+3s+3K$$

罗斯阵列：$\begin{matrix}1 & 3\\ 4 & 3K\\ -\dfrac{3K-12}{4} & 0\end{matrix}$，由罗斯准则，当$\begin{cases}K>0\\ 3K-12<0\end{cases}$时，即当 0<K<4 时，系统稳定。