第十章

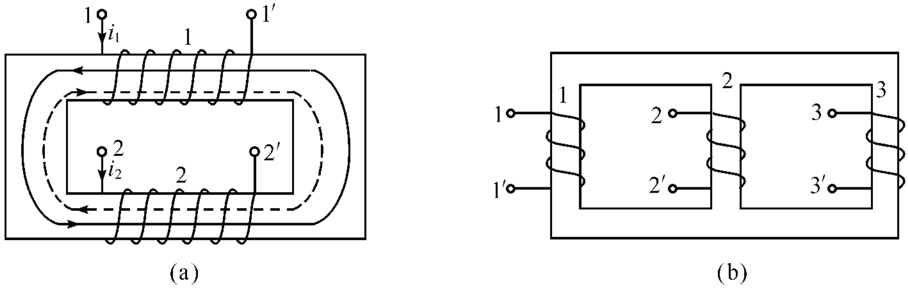
含有耦合电感的电路

知识网络图

- 含有耦合电感的电路
  - 互感的基本概念
  - 耦合电感
    - 电路分析计算
    - 典型电路
      - 空心变压器

课后习题全解

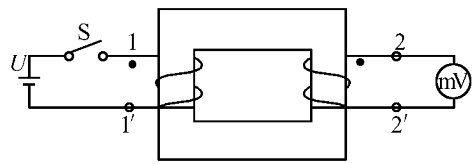
○10－1　**试确定题 10－1 图所示耦合线圈的同名端。**



题 10－1

解　**根据同名端的定义，图**(a)**中，假设电流** i_1，i_2 **分别从端子** 1 **和端子** 2 **中流入，按右手螺旋法则可得，**i_1 **产生的磁通链（用实线表示）方向与** i_2 **产生的磁通链（用虚线表示）方向相反如图**(a)**所示，显然它们相互"削弱"，所以判定端子** 1 **与端子** 2 **为异名端，那么，同名端即为**$(1,2')$**或**$(1',2)$。

对图(b)，**分析过程同图**(a)。**判断出同名端为**：$(1,2')(1,3')(2,3')$。



题 10－2

○10－2　**两个具有耦合的线圈如题 10－2 图所示。**

(1)**标出它们的同名端**；(2)**当图中开关** S **闭合时或闭合后再打开时，试根据毫伏表的偏转方向确定同名端。**

解　(1)**根据同名端定义和两个线圈的绕向，采用题 10－1 中的分析方法，判定同名端为**$(1,2)$，**如题 10－2 图中所标示。**

(2)**图示电路是测试耦合线圈同名端的实验线路。当开关** S **迅速闭合时，线圈** 1 **中有随时间增大的电流** i_1 **从电源正极流入线圈端子** 1，**这时**$\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}>0$，**则毫伏表的高电位端与端子** 1 **为同名端。当开关** S **闭合后再打开时，电流** i_1 **减小，毫伏表的低电位端与端子** 1 **为同名端。**

○10－3　**若有电流** $i_1=2+5\cos(10t+30^\circ)\mathrm{A}$，$i_2=10\mathrm{e}^{-5t}\mathrm{A}$，**各从题 10－1 图**(a)**所示线圈的 1 端和 2 端流入，并设线圈 1 的电感** $L_1=6\mathrm{H}$，**线圈 2 的电感** $L_2=3\mathrm{H}$，**互感为** $M=4\mathrm{H}$。**试求**：(1)**各线圈的磁通链**；(2)**端电压** $u_{11'}$ **和** $u_{22'}$；(3)**耦合因数** k。

解　**如上面题 10－1 图**(a)**所示的耦合线圈，设电流** i_1 **和** i_2 **分别从各自线圈的** 1 **端和** 2 **端流入，按右手螺旋法则有，**i_1 **产生的磁通链（用实线表示）方向和** i_2 **产生**

的磁通链(用虚线表示)方向如题 10－1 图(a)所示。

(1)耦合线圈中的磁通链是自感磁通链和互感磁通链的代数和，所以根据题 10－1图(a)所示的磁通链方向，有

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{11} - \Psi_{12} = L_1 i_1 - M i_2 \\ &= 12 + 30\cos(10t + 30°) - 4e^{-5t}\,\mathrm{Wb}\\ \Psi_2 &= -\Psi_{21} + \Psi_{22} = -M i_1 + L_2 i_2 \\ &= -8 - 20\cos(10t + 30°) + 30e^{-5t}\,\mathrm{Wb}\end{aligned}$$

(2)由上述可得端电压

$$u_{11'} = \frac{\mathrm{d}\Psi_1}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -300\sin(10t + 30°) + 200e^{-5t}\,\mathrm{V}$$

$$u_{22'} = \frac{\mathrm{d}\Psi_2}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 200\sin(10t + 30°) - 150e^{-5t}\,\mathrm{V}$$

(3)根据耦合因数 k 的定义，有
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = 0.943$$

○10－4　能否使两个耦合线圈的耦合系数 $k=0$。

解　可以。因为两个线圈之间的耦合系数 $k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$是反映两线圈耦合的松紧程度的，由 k 的表达式可以看出：(1)$0 \leqslant k \leqslant 1$，若 $k=0$，说明两线圈之间没有耦合；若 $k=1$，称两线圈全耦合。(2)k 的大小与线圈的结构、两线圈的相互位置以及周围磁介质有关。因此，若把两个线圈相距很远，或相互垂直放置，则 k 值就可很小，甚至接近于零。由此可见，当电感 L_1 和 L_2 一定时，改变或调整两个线圈的相互位置可以改变 k 的大小，也就是改变了互感 M 的大小。

○10－5　题 10－5 图所示电路中 $L_1=6\mathrm{H}$，$L_2=3\mathrm{H}$，$M=4\mathrm{H}$。试求从端子 1—1′看进去的等效电感。

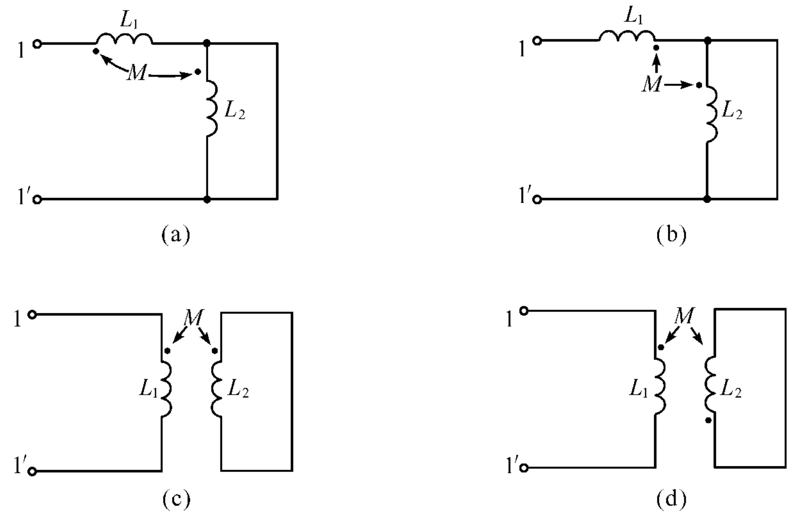
解　(1)题解 10－5 图(a)所示的去耦等效电路(原电路异名端相连)，可求得从端子 1—1′看进去的等效电感为

$$L_{eq} = (L_1 + M) + (L_2 + M) /\!/ (-M) = 10 + 7 /\!/ (-4) = 0.667\mathrm{H}$$

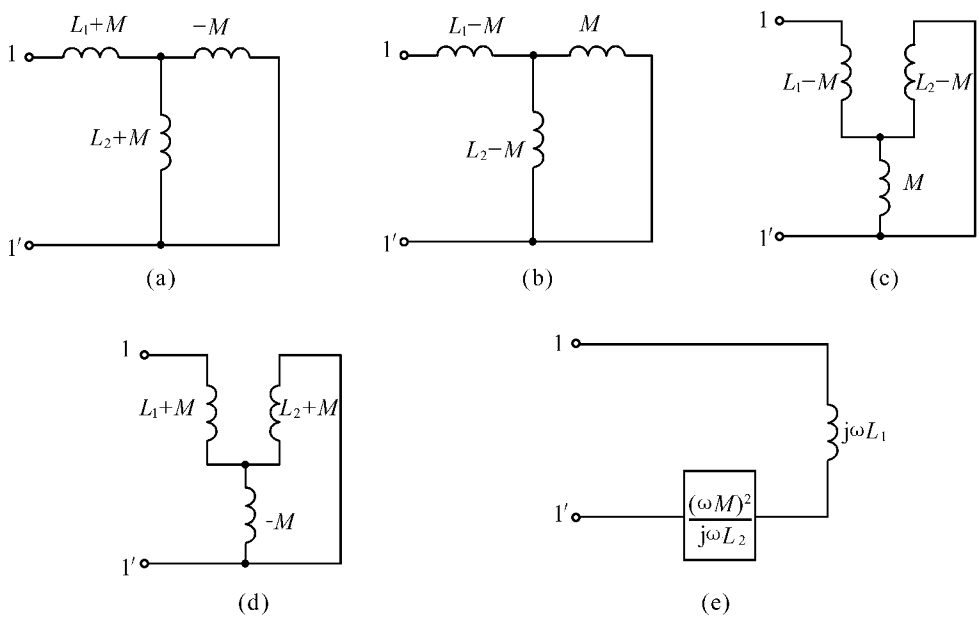
(2)由题解 10－5 图(b)所示的去耦等效电路(原电路同名端相连)，可求得从端子 1—1′看进去的等效电感为

$$L_{eq} = (L_1 - M) + (L_2 - M) /\!/ M = 2 + (-1) /\!/ 4 = 0.667\mathrm{H}$$

(3)题 10－5 图(c)所示电路可有两种等效电路，一是如题解 10－5 图(c)所示的去耦等效电路；二是如题解 10－5 图(e)所示的原边等效电路。分别求解如下：



题 10—5



题解 10—5

题解 10—5 图(c)电路，有

$$L_{eq}=(L_1-M)+M/\!/(L_2-M)=2+4/\!/(-1)=0.667\text{H}$$

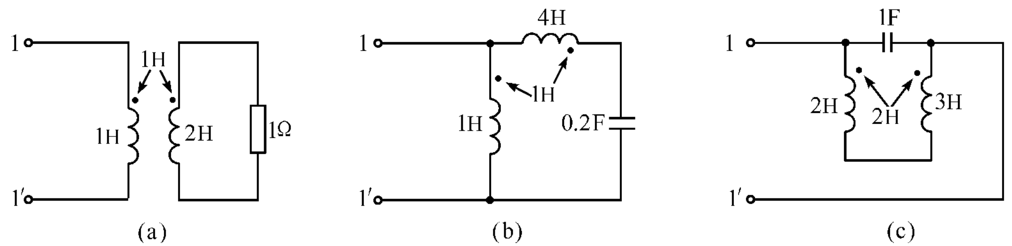
题解 10—5 图(e)电路中，$\dfrac{(\omega M)^2}{\mathrm{j}\omega L_2}=-\mathrm{j}\omega\dfrac{M^2}{L_2}$**，则等效电感为**

$$L_{eq}=L_1-\frac{M^2}{L_2}=6-\frac{16}{3}=0.667\text{H}$$

(4)同理，原题 10－5 图(d)所示电路也有两种等效电路，一是如题解 10－5 图(d)所示的去耦等效电路；二是同上面(3)中的题解 10－5 图(e)所示的原边等效电路，故求解结果相同。对图(d)去耦等效电路，求得从端子 1—1′看进去的等效电感为

$$L_{eq}=(L_1+M)+(-M)/\!/(L_2+M)=10+(-4)/\!/7=0.667\text{H}$$

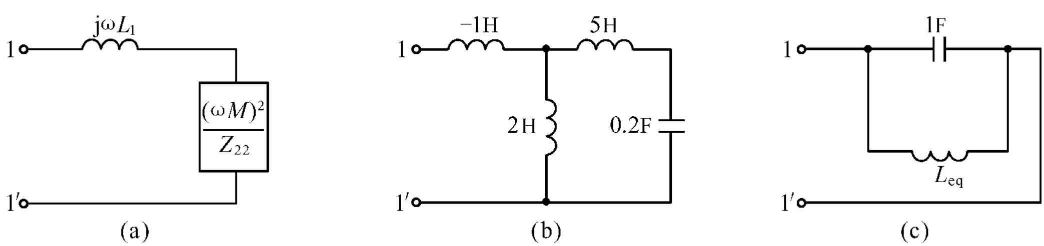
◎10－6　求题 10－6 图所示电路的输入阻抗 $Z(\omega=1\text{rad/s})$。



题 10－6 图

分析　对电路进行原边等效和去耦等效求解即可。

解　题 10－6 图所示电路的原边等效电路和去耦等效电路如题解 10－6 图所示。



题解 10－6 图

(1)题解图 10－6 图(a)所示的原边等效电路中，$Z_{22}=1+\text{j}2\Omega$，故输入阻抗为

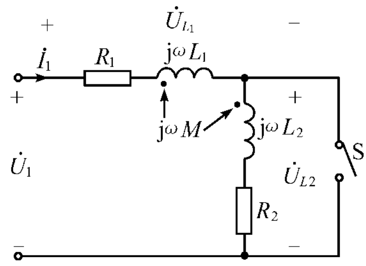
$$Z=\text{j}\omega L_1+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\text{j}+\frac{1}{1+\text{j}2}=(0.2+\text{j}0.6)\Omega$$

(2)由题解 10－6 图(b)所示的去耦等效电路，可得

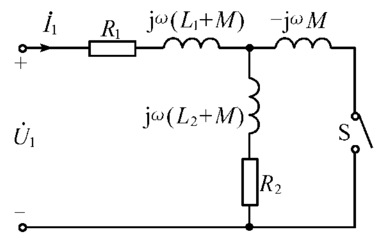
$$Z=-\text{j}1+(\text{j}2)/\!/(\text{j}5-\text{j}\,\frac{1}{0.2})=-\text{j}1\Omega$$

(3)题解 10－6 图(c)所示的串联去耦等效电路中，等效电感为：$L_{eq}=2+3-4=1\text{H}$，且 $\omega=\frac{1}{\sqrt{L_{eq}C}}=1\text{rad/s}$，故此电路处于并联谐振状态，则输入阻抗为 $Z=\infty$。

○10—7　题 10—7 图所示电路中 $R_1=R_2=1\Omega, \omega L_1=3\Omega, \omega L_2=2\Omega, \omega M=2\Omega, U_1=100\text{V}$。求:(1)开关 S 打开和闭合时的电流 $\dot{I}_1$;(2)S 闭合时各部分的复功率。



题 10—7 图



题解 10—7 图

解　本题可用去耦等效电路计算。等效电路如题解 10—7 图所示,设 $\dot{U}_1=100\angle 0^\circ$ V 则,

(1)开关 S 打开时

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega(L_1+L_2+2M)}$$
$$=\frac{100\angle 0^\circ}{2+\mathrm{j}9}=\frac{100}{9.22\angle 88.47^\circ}=10.85\angle -77.47^\circ\ \text{A}$$

开关 S 闭合时

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R_1+\mathrm{j}\omega(L_1+M)+[R_2+\mathrm{j}\omega(L_2+M)]/\!/(-\mathrm{j}\omega M)}$$
$$=\frac{100\angle 0^\circ}{1+\mathrm{j}5+(1+\mathrm{j}4)/\!/(-\mathrm{j}2)}=43.85\angle -37.88^\circ\ \text{A}$$

(2)开关 S 闭合时,电源发出的复功率为

$$\overline{S}=\dot{U}_1\dot{I}_1^*=100\times 43.85\angle 37.88^\circ=4385\angle 37.88^\circ\ \text{V}\cdot\text{A}$$

因此时线圈 2 被短路,其上的电压 $\dot{U}_{L2}=0$,则线圈 1 上的电压 $\dot{U}_{L1}=\dot{U}_1$,故线圈 2 吸收的复功度率为:$\overline{S}_{L2}=0$;线圈 1 吸收的复功率为:$\overline{S}_{L1}=\overline{S}=4385\angle 37.88^\circ$ V·A。

○10—8　把两个线圈串联起来接到 50Hz,220V 的正弦电源上,顺接时得电流 $I=2.7\text{A}$,吸收的功率为 218.7W;反接时电流为 7A。求互感 M。

解　按题意知:$U_S=220\text{V}, \omega=2\pi f=314\text{rad/s}$,则当两个线圈顺接时,等效电感为:$L_1+L_2+2M$,等效电阻为

$$R=\frac{P}{I^2}=\frac{218.7}{2.7^2}=30\Omega$$

则总阻抗为

$$\sqrt{R^2+\omega^2(L_1+L_2+2M)^2}=\frac{U_S}{I}=\frac{220}{2.7}$$

故

$$\omega(L_1+L_2+2M)=\sqrt{(\frac{220}{2.7})^2-30^2}=75.758 \qquad ①$$

而当两个线圈反接时，等效电感为：

$$L_1+L_2-2M$$

则总阻抗为

$$\sqrt{R^2+\omega^2(L_1+L_2-2M)^2}=\frac{U_S}{I}=\frac{220}{7}$$

故

$$\omega(L_1+L_2-2M)=\sqrt{(\frac{220}{7})^2-30^2}=9.368$$

②

用式①减去式②可得

$$M=\frac{75.758-9.368}{4\omega}=52.86\text{mH}$$

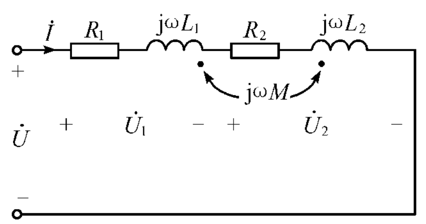
●10－9 电路如题 10－9 图所示，已知两个线圈的参数为：$R_1=R_2=100\Omega$，$L_1=3\text{H}$，$L_2=10\text{H}$，$M=5\text{H}$，正弦电源的电压 $U=220\text{V}$，$\omega=100\text{rad/s}$。

(1)试求两个线圈端电压，并作出电路的相量图；

(2)证明两个耦合电感反接串联时不可能有 $L_1+L_2-2M\leqslant 0$；

(3)电路中串联多大的电容可使电路发生串联谐振；

(4)画出该电路的去耦等效电路。



题 10－9 图

分析　画出相量图，根据相量图求解即可。

解　题 10－9 图所示电路中的两个耦合线圈为反接串联，所以其等效电感为：

$$L_{eq}=L_1+L_2-2M=3\text{H}$$

令 $\dot{U}=220\angle 0^\circ$ V，故电流 $\dot{I}$ 为

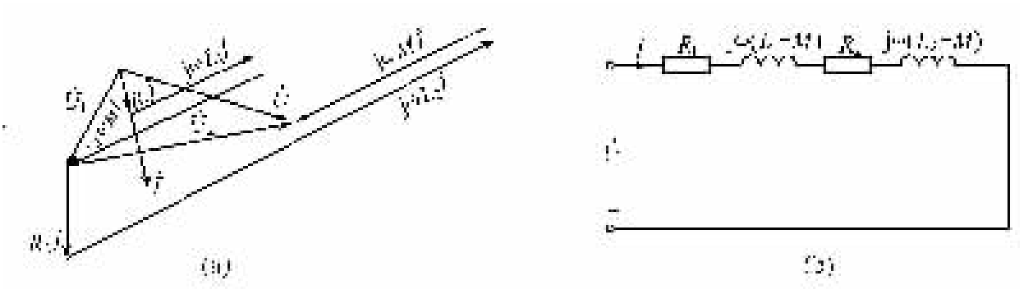
$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_{eq}}=\frac{220\angle 0^\circ}{200+\mathrm{j}300}=0.61\angle -56.31^\circ\ \mathrm{A}$$

(1)两端线圈端电压 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 的参考方向如题 10－9 图所示，则

$$\begin{aligned}\dot{U}_1&=[R_1+\mathrm{j}\omega(L_1-M)]\dot{I}\\&=(100-\mathrm{j}200)\times 0.61\angle -56.31^\circ=136.4\angle -119.74^\circ\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2&=[R_2+\mathrm{j}\omega(L_2-M)]\dot{I}\\&=(100+\mathrm{j}500)\times 0.61\angle -56.31^\circ=311.04\angle 22.38^\circ\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

电路相量图如题解 10－9 图(a)所示。



题解 10－9 图

(2)只要证明两个耦合电感反接串联时，有 $L_1+L_2-2M\geqslant 0$ 即可。证明如下：因为

$$(\sqrt{L_1}-\sqrt{L_2})^2\geqslant 0$$

故

$$L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}\geqslant 0$$

即

$$L_1+L_2\geqslant 2\sqrt{L_1L_2}$$

又根据耦合因数 $k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\leqslant 1$，即 $M\leqslant\sqrt{L_1L_2}$

所以

$$L_1+L_2\geqslant 2M\quad 或\quad L_1+L_2-2M\geqslant 0$$

(3)因为串联谐振的条件是：

$$\omega L_{eq}-\frac{1}{\omega C}=0$$

即

$$\omega^2=\frac{1}{L_{eq}C}$$

所以

$$C=\frac{1}{\omega^2 L_{eq}}=\frac{1}{100^2\times 3}=33.33\mu\text{F}$$

(4)该电路两个耦合线圈是反接串联，所以去耦等效电路如题解 10－9 图(b)所示。

小结　证明 $L_1+L_2-2M\leqslant 0$ 时，应用到耦合因数 k，k 是一个不大于 1 的数，电路发生串联谐振时，$\omega C=\frac{1}{\omega L}$，即 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。

◯10－10　把题 10－9 中的两个线圈改为同侧并连接至相同的电源上。

(1)此时要用两个功率表分别测量两个线圈的功率，试画出它们的接线图，求出功率表的读数，并作必要的解释，作出电路的相量图；

(2)求电路的等效阻抗。

解　(1)按题意，可画出题解 10－10 图(a)所示的电路接线图。功率表的读数即为每个线圈所吸收的有功功率 P。

令 $\dot U=220\angle 0°$ V，设各支路电流相量如题解 10－10 图(a)所示，列出 KVL 方程为

$$(R_1+j\omega L_1)\dot I_1+j\omega M\dot I_2=\dot U$$

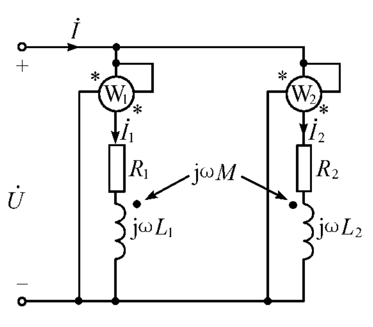
$$j\omega M\dot I_1+(R_2+j\omega L_2)\dot I_2=\dot U$$

代入参数值，得

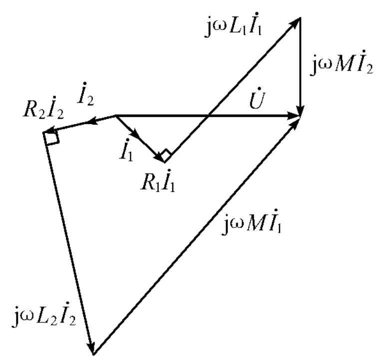
$$(100+j300)\dot I_1+j500\dot I_2=220\angle 0°$$

$$j500\dot I_1+(100+j1000)\dot I_2=220\angle 0°$$

解之



(a)



(b)

题解 10－10 图

$$\dot{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}220 & \mathrm{j}500\\ 220 & 100+\mathrm{j}1000\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}100+\mathrm{j}300 & \mathrm{j}500\\ \mathrm{j}500 & 100+\mathrm{j}1000\end{vmatrix}}=0.825\angle{-28.41^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_2=\frac{220-(100+\mathrm{j}300)\dot{I}_1}{\mathrm{j}500}=0.362\angle{-170.56^\circ}\ \mathrm{A}$$

两功率表的读数分别为

$$P_1=UI_1\cos\varphi_1=220\times0.825\times\cos28.41^\circ=159.64\mathrm{W}$$

$$P_2=UI_2\cos\varphi_2=220\times0.362\times\cos170.56^\circ=-78.56\mathrm{W}$$

两功率表的读数中出现一负值，这是由于互感的相互作用，使得某一支路出现了电压与电流之间的相位差角大于 90°，故会出现有功功率为负值的情况。

电路相量图如题解 10－10 图(b)所示。

(2)电路的等效阻抗 Z_{eq} 为：

$$Z_{\mathrm{eq}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_1+\dot{I}_2}=\frac{220}{0.583\angle{-50.8^\circ}}=377\angle{50.8^\circ}\ \Omega$$

◎10－11　题 10－11 图所示电路中 $M=0.04\mathrm{H}$。求此串联电路的谐振频率。

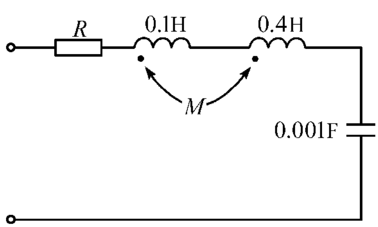
分析　$L_{\mathrm{eq}}=L_1+L_2+2M$，串联谐振电路 $\omega C=\dfrac{1}{\omega L}$ 即 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$。

解　该电路的耦合电感为顺接串联，所以其等效电感 L_{eq} 为

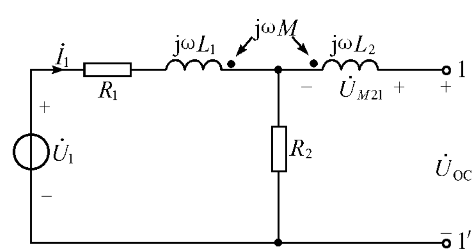
$$L_{\mathrm{eq}}=L_1+L_2+2M=0.1+0.4+0.08=0.58\mathrm{H}$$

故，此串联电路的谐振频率为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{eq}}C}}=\frac{1}{\sqrt{0.58\times0.001}}=41.52\ \mathrm{rad/s}$$



题 10－11 图



题 10－12 图

○10－12　求题 10－12 图所示一端口电路的戴维宁等效电路。已知 $\omega L_1=\omega L_2=10\Omega$，$\omega M=5\Omega$，$R_1=R_2=6\Omega$，$U_1=60\mathrm{V}$(正弦)。

解

$$\dot{U}_{\mathrm{oc}}=\dot{U}_{M21}+R_2\dot{I}_1=\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+R_2\dot{I}_1=(R_2+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_1$$

式中第一项是电流 $\dot{I}_1$ 在 L_2 中产生的互感电压，第二项为电流 $\dot{I}_1$ 在电阻 R_2 上

的电压。而电流

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_1}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1}$$

若令 $\dot{U}_1=U_1\angle 0^\circ=60\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$,则可得

$$\dot{U}_{oc}=\frac{R_2+\mathrm{j}\omega M}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1}\dot{U}_1=\frac{6+\mathrm{j}5}{12+\mathrm{j}10}\times 60\angle 0^\circ=30\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

对于含有耦合电感的一端口,它的戴维宁等效阻抗的求法与具有受控源的电路完全一样。这里采用题解 10－12 图(a)所示的方法,先将原端口中的独立电压源以短路线代替,再在端口 1—1′处置一电压源 $\dot{U}$,用网孔电流法,其方程为

$$(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_{\mathrm{m1}}-(R_2+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_{\mathrm{m2}}=\dot{U}$$

$$-(R_2+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_{\mathrm{m1}}+(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_{\mathrm{m2}}=0$$

解得电流

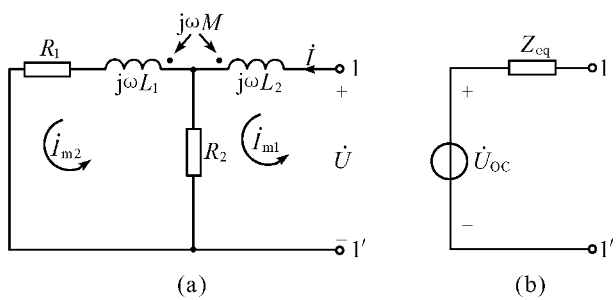
$$\dot{I}_{\mathrm{m1}}=\frac{(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{U}}{(R_2+\mathrm{j}\omega L_2)(R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1)-(R_2+\mathrm{j}\omega M)^2}$$

且有 $\dot{I}=\dot{I}_{\mathrm{m1}}$,根据等效阻抗的定义,则有

$$Z_{\mathrm{eq}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{\dot{U}}{\dot{I}_{\mathrm{m1}}}=R_2+\mathrm{j}\omega L_2-\frac{(R_2+\mathrm{j}\omega M)^2}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega L_1}$$

$$=6+\mathrm{j}10-\frac{(6+\mathrm{j}5)^2}{12+\mathrm{j}10}=3+\mathrm{j}7.5\Omega$$

该一端口的戴维宁等效电路如题解 10－12 图(b)所示。



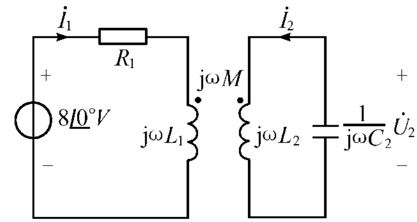
题解 10－12 图

◎10－13　题 10－13 图所示电路中 $R_1=1\Omega$,$\omega L_1=2\Omega$,$\omega L_2=32\Omega$,$\omega M=8\Omega$,$\frac{1}{\omega C}=32\Omega$。求电流 $\dot{I}_1$ 和电压 $\dot{U}_2$。

分析　对电路分别进行原边等效,幅边等效求解即可。

解　用题解 10－13 图(a)所示的原边等效电路求电流 $\dot{I}_1$,其中

$$Z_{22}=\mathrm{j}\omega L_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}=\mathrm{j}32-\mathrm{j}32=0$$



题 10－13 图

即副边电路处于谐振状态。故,反映阻抗为

$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\infty$$

所以,电流 $\dot{I}_1=0$

用题解 10－13 图(b)所示的副边等效电路求电压 $\dot{U}_2$,其中

$$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1=(1+\mathrm{j}2)\Omega$$

则反映阻抗为

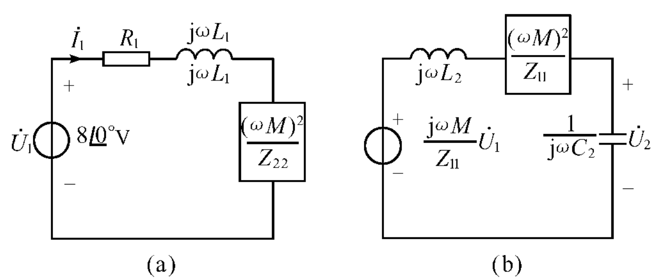
$$\frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}=\frac{64}{1+\mathrm{j}2}=28.62\angle -63.43°\ \Omega$$

等效电源电压为

$$\frac{\mathrm{j}\omega M}{Z_{11}}\dot{U}_1=\frac{\mathrm{j}8}{1+\mathrm{j}2}\times 8\angle 0°=28.62\angle 26.57°\ \mathrm{V}$$

故,电压 $\dot{U}_2$ 为

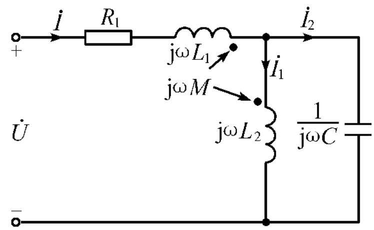
$$\dot{U}_2=\frac{-\mathrm{j}32}{\mathrm{j}32+28.62\angle -63.43°-\mathrm{j}32}\times 28.62\angle 26.57°=32\angle 0°\ \mathrm{V}$$



题解 10－13 图

○10－14 略

●10－15 题 10－15 图所示电路中 $R_1=50\Omega$,$L_1=70\mathrm{mH}$,$L_2=25\mathrm{mH}$,$M=25\mathrm{mH}$,$C=1\mu\mathrm{F}$,正弦电源的电压 $\dot{U}=500\angle 0°\ \mathrm{V}$,$\omega=10^4\ \mathrm{rad/s}$。求各支路支流。



题 10－15 图

分析　利用公式将电路进行去耦等效，再进行求解即可。

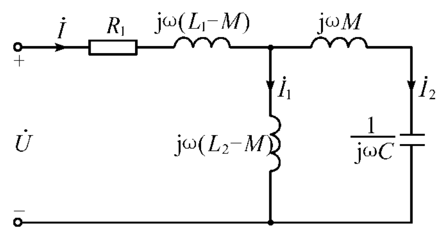
解　采用如题解 10－15 图所示的去耦等效电路求解。设各支路电流 $\dot{I}$，$\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 参考方向如图所示。图中各阻抗计算如下

$$j\omega(L_1-M)=j450\Omega$$

$$j\omega(L_2-M)=0$$

$$j\omega M=j250\Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C}=-j100\Omega$$



题解 10－15 图

故，可求得各支路电流为

$$\dot{I}=\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{R_1+j\omega(L_1-M)}$$

$$=\frac{500\angle 500^\circ}{50+j450}=1.104\angle -83.66^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_2=0$$

小结　出现这种耦合情况，一般情况先进行去耦等效。

○10－16　**列出题 10－16 图示电路的回路电流方程。**

解　按题 10－16 图所示电路中的回路电流参考方向，可列出该电路的回路电流方程。

$$(R+j\omega L_1+j\omega L_2)\dot{I}_{11}-j\omega L_2\dot{I}_{12}-j\omega M_{12}(\dot{I}_{11}-\dot{I}_{12})$$

$$-j\omega M_{31}\dot{I}_{12}-j\omega M_{12}\dot{I}_{11}+j\omega M_{23}\dot{I}_{12}=\dot{U}_{S1} \quad ①$$

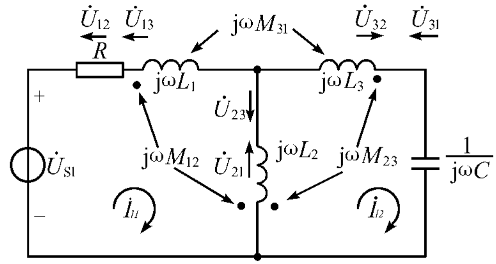
$$-j\omega L_2\dot{I}_{11}+(j\omega L_2+j\omega L_3+\frac{1}{j\omega C})\dot{I}_{12}+j\omega M_{12}\dot{I}_{11}-j\omega M_{23}\dot{I}_{12}$$

$$-j\omega M_{31}\dot{I}_{11}+j\omega M_{23}(\dot{I}_{11}-\dot{I}_{12})=0 \quad ②$$

○10－17　(1) $i_1=0.1106\cos(314t-64.85^\circ)$ A

(2) $i_2=0.3502\cos(314t+1.033^\circ)$ A

○10－18　**题 10－18 图所示电路中的理想变压器的变比为 10∶1。求电压 $\dot{U}_2$。**



题 10－16 图

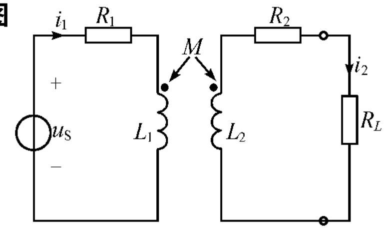
解 题解 10－18 图为理想变压器原边等效电路，图中等效电阻 R_{eq} 为

$$R_{eq}=n^2R_L=100\times 50=5000\Omega$$

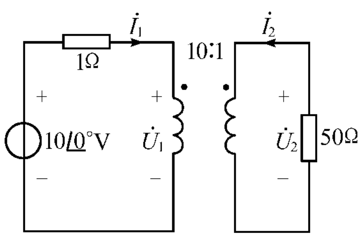
故 $$\dot{U}_1=\frac{R_{eq}}{1+R_{eq}}\times 10\angle 0^\circ=9.998\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

又根据理想变压器 VCR 中的电压方程

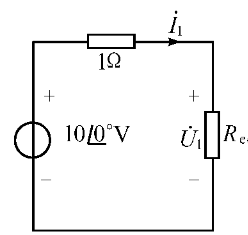
$$\dot{U}_1=10\dot{U}_2$$



题 10－17 图



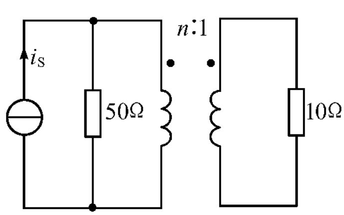
题 10－18

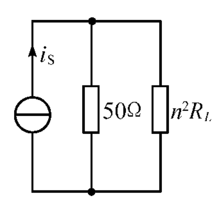


题解 10－18

可求得电压 $\dot{U}_2$ 为 $$\dot{U}_2=\frac{1}{10}\dot{U}_1=0.9998\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

◎10－19 如果使 10Ω 电阻能获得最大功率，试确定题 10－19 图所示电路中理想变压器的变比 n。





题 10－19 图

题解 10－19 图

分析　将负载电阻折算到初级求解即可。

解　应用理想变压器的变阻抗性质，把负载电阻折算到初级，即

$$R_{in}=n^2R_L=n^2\times 10$$

初级等效电路如题解 10－19 图所示。根据最大功率传输定理，显然当

$$n^2\times 10=50$$

即变比 $n=\sqrt{\frac{50}{10}}=\sqrt{5}=2.236$ 时，10Ω 电阻获得最大功率。

◯10－20　$Z=\mathrm{j}1\Omega$

第十一章

三 相 电 路

学习要求

1. 正确理解和掌握三相电路的连接方式。
2. 熟练掌握三相电路的电压、电流和功率的计算。
3. 了解不对称三相电路的概念。
4. 熟练掌握三相功率的计算，测量及功率表读数的计算。

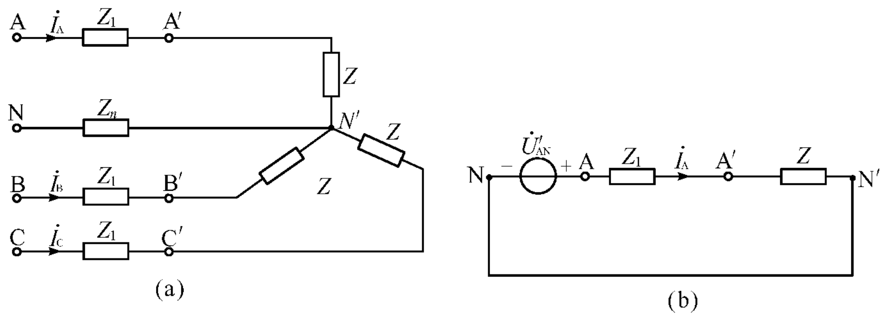
知识网络图

- 三相电路
  - 三相电源
    - △形连接
    - Y 形连接
  - 三相电路
    - 对称三相电路
      - 概念
      - 电压(电流)的相值和线值之间的关系
      - 计算
      - 功率问题和测量
    - 不对称三相电路(简单概念介绍)

课后习题全解

○11－1　**已知对称三相电路的星形负载阻抗 $Z=(165+\mathrm{j}84)\Omega$，端线阻抗 $Z_1=(2+\mathrm{j}1)\Omega$，中线阻抗 $Z_N=(1+\mathrm{j}1)\Omega$，线电压 $U_1=380\mathrm{V}$。求负载端的电流和线电压，并作电路的相量图。**

解　**题解** 11－1 **图**(a)**为** Y **形接的对称三相电路。由于是对称电路可归结为一相计算，如题解** 11－1 **图**(b)**所示。**



题解 11－1 **图**

设
$$\dot{U}_{AN}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

由题解 11－1 **图**(b)**有** $\dot{I}_A=\dfrac{\dot{U}_{AN}}{Z_1+Z}=\dfrac{220\angle 0^\circ}{167+\mathrm{j}85}=1.174\angle -26.98^\circ\ \mathrm{A}$

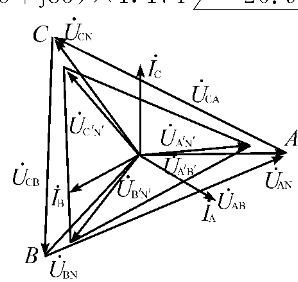
利用对称性，知

$$\dot{I}_B=1.174(\angle -26.98^\circ-\angle 120^\circ)=1.174\angle -146.98^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C=1.174(\angle -26.98^\circ+\angle 120^\circ)=1.174\angle 93.02^\circ\ \mathrm{A}$$

负载端的相电压为

$$\dot{U}_{A'N'}=Z\dot{I}_A=(165+\mathrm{j}85)\times 1.174\angle -26.98^\circ=217.90\angle 0.275^\circ\ \mathrm{V}$$



题解 11－1 **图**(c)

从而，负载的线电压为 $\dot{U}_{A'B'}=\sqrt{3}\dot{U}_{A'N'}\angle 30^\circ=377.41\angle 30^\circ\ \text{V}$

根据对称性，知

$$\dot{U}_{B'C'}=377.41\angle -30^\circ-120^\circ=377.41\angle -90^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{C'A'}=377.41\angle -30^\circ+120^\circ=377.41\angle 150^\circ\ \text{V}$$

电路的相量图如题解 11－1 图(c)所示。

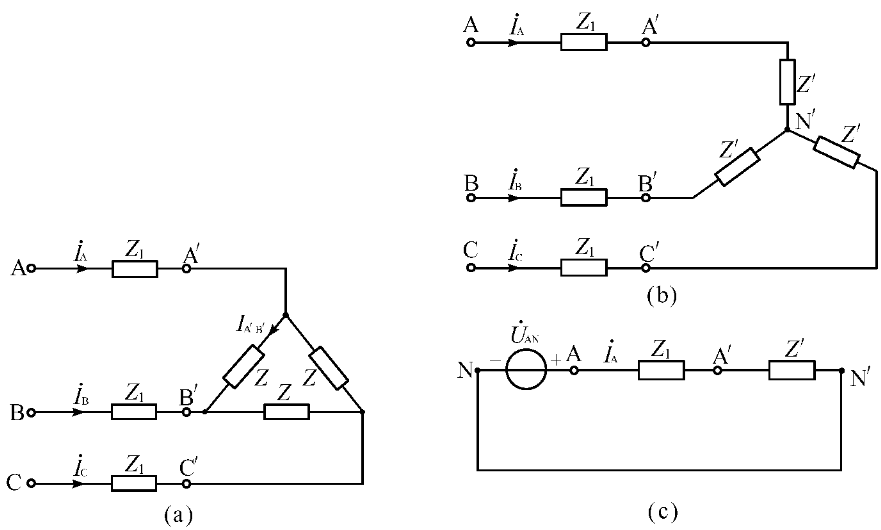
◎11－2　已知对称三相电路的线电压 $U_1=380\text{V}$(电源端)，三角负载阻抗 $Z=(4.5+\text{j}14)\Omega$，端线阻抗 $Z_1=(1.5+\text{j}2)\Omega$。求线电流和负载的相电流，并作相量图。

分析　对电路中的△连接，等效为 Y—Y 连接，求解即可。

解　如题解 11－2 图(a)所示为△连接的对称三相电路。等效为 Y－Y 连接，如题解 11－2 图(b)所示。

其中
$$Z'=\frac{Z}{3}=\frac{1}{3}\times(4.5+\text{j}14)=1.5+\text{j}4.67\Omega$$

由于是对称电路可归结为一相计算，如题解 11－2 图(c)所示。



题解 11－2 图

令 $\dot{U}_{AN}=\dfrac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \text{V}$

$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{Z_1+Z'}=\frac{220\angle 0^\circ}{1.5+\text{j}2+1.5+\text{j}4.67}=30.08\angle -65.78^\circ\ \text{A}$$

根据对称性：$\dot{I}_B=30.08(\angle -65.78^\circ-\angle 120^\circ)=30.08\angle -185.78^\circ\ \text{A}$

$$\dot{I}_C = 30.08(\angle -65.78^\circ + \angle 120^\circ) = 30.08\angle 54.22^\circ \text{ A}$$

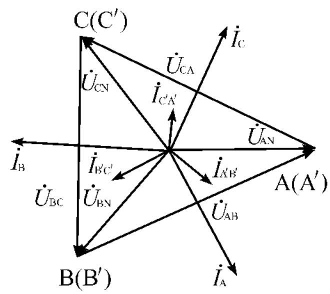
利用三角形连接的线电流与相电流的关系，可求得题解 11－2 **图**(a)**中负载的相电流，有**

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_A\angle 30^\circ = 17.37\angle -35.78^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{B'C'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_B\angle 30^\circ = 17.37\angle -155.78^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{C'A'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_C\angle 30^\circ = 17.37\angle 84.22^\circ \text{ A}$$

电路的相量图如题解 11－2 **图**(d)**所示。**



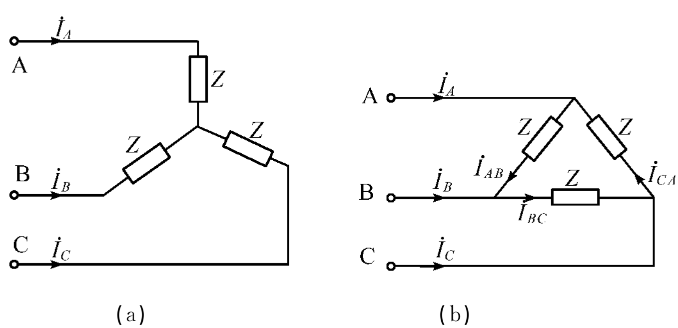
题解 11－2 **图**(d)

○11－3　**对称三相电路的线电压** $U_1 = 230\text{V}$，**负载阻抗** $Z = (12 + \text{j}16)\Omega$。**试求**：

(1)**星形连接负载时的线电流及吸收的总功率**；

(2)**三角形连接负载时的线电流、相电流和吸收的总功率**；

(3)**比较**(1)**和**(2)**的结果能得到什么结论**？



题解 11－3 **图**

解　(1)**负载星形连接时如题解** 11－3 **图**(a)**所示。**

令
$$\dot{U}_{AN} = \frac{U_1}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 132.79\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{Z}=\frac{132.79\angle 0^\circ}{12+j16}=6.64\angle -53.13^\circ\ \text{A}$$（对称电路一相计算，图略）

根据对称性

$$\dot{I}_B=6.64(\angle -53.13^\circ-120^\circ)=6.64\angle -173.13^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=6.64(\angle -53.13^\circ+120^\circ)=6.64\angle 66.87^\circ\ \text{A}$$

星形连接负载吸收的总功率为

$$P=\sqrt{3}U_l1_l\cos\varphi_2=\sqrt{3}\times 230\times 6.64\cos 53.13^\circ=1587.11\text{W}$$

(2)负载三角形连接时，如题解 11－3 图(b)所示。

令 $$\dot{U}_{AB}=230\angle 0^\circ\ \text{V},\dot{I}_{AB}=\frac{\dot{U}_{AB}}{Z}=11.5\angle -53.13^\circ\ \text{A}$$

利用对称性

$$\dot{I}_{BC}=11.5(\angle -53.13^\circ-120^\circ)=11.5\angle -173.13^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{CA}=11.5(\angle -53.13^\circ+120^\circ)=11.5\angle 66.87^\circ\ \text{A}$$

从而，有 $$\dot{I}_A=\sqrt{3}\dot{I}_{AB}\angle -30^\circ=19.92\angle -83.13^\circ\ \text{A}$$

利用对称性

$$\dot{I}_B=19.92(\angle -83.13^\circ-120^\circ)=19.92\angle -203.13^\circ=19.92\angle 156.87^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=19.92(\angle -53.13^\circ+120^\circ)=19.92\angle 36.87^\circ\ \text{A}$$

三角形连接负载吸收的总功率为

$$P=\sqrt{3}U_lI_l\cos\varphi_2=\sqrt{3}\times 230\times 19.92\cos 53.13^\circ=4761.34\text{W}$$

(3)比较(1)和(2)的结果可以得到以下结论：

在相同的电源线电压作用下，负载由 Y 连接改为 △ 连接，线电流增加到原来的 3 倍，功率也增加到原来的 3 倍。即 $I_{l\Delta}=3I_{lY},P_\Delta=3P_Y$。

◎11－4 题 11－4 图所示对称工频三相耦合电路接于对称三相电源，线电压 $U_l=380\text{V},R=30\Omega,L=0.29\text{H},M=0.12\text{H}$。求相电流和负载吸收的总功率。

分析 先对电路进行去耦等效，然后再进行求解即可。

解 去耦等效电路如题解 11－4 图所示。

电路为对称三相电路，单相分析。

令 $$\dot{U}_{AN}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ\ \text{V}=220\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_A=\frac{\dot{U}_{AN}}{R+j\omega(L-M)}=\frac{220\angle 0^\circ}{30+j314\times(0.29-0.12)}$$（工频 $f=50\text{Hz},\omega=314\text{rad/s}$）

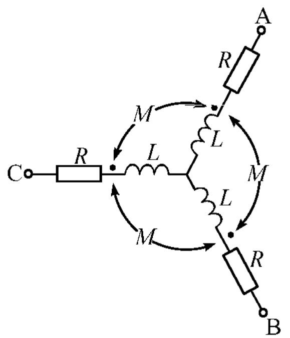
$$=3.593\angle -60.66^\circ\ \text{A}$$

利用对称性

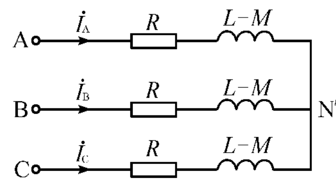
$$\dot{I}_B = 3.593\angle{-180.66^\circ}\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = 3.593\angle{59.34^\circ}\ \text{A}$$

负载吸收的总功率为　$P = 3I_A^2R = 3\times3.593^2\times30 = 1161.78\text{W}$

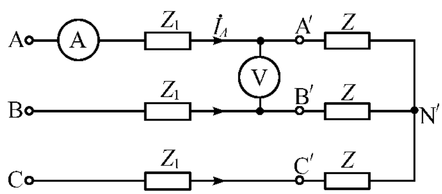


题 11－4 图



题解 11－4 图

○11－5　题 11－5 图所示对称 Y－Y 三相电路中，电压表的读数为 1143.16V，$Z=(15+\text{j}15\sqrt{3})\Omega$，$Z_1=(1+\text{j}2)\Omega$。求图示电路电流表的读数和线电压 U_{AB}。



题 11－5 图

解　如题 11－5 图所示，可知电压表的读数实际是负载端的线电压。

即　$$U_{A'B'} = 1143.16\text{V},\quad U_{A'N'} = \frac{1}{\sqrt{3}}U_{A'B'} = 660\text{V}$$

则　$I_A = \dfrac{U_{A'N'}}{|Z|} = \dfrac{660}{30} = 22\text{A}$，即为电流表的读数。

又　$$\dot{U}_{AN} = \dot{I}_A(Z_1+Z),\quad \dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle{30^\circ}$$

所以　$$U_{AB} = \sqrt{3}I_A|Z_1+Z|$$

又　$$|Z_1+Z| = |1+\text{j}2+15+\text{j}15\sqrt{3}| = 32.232\Omega$$

从而　$$U_{AB} = \sqrt{3}\times22\times32.232 = 1228.2\text{V}$$

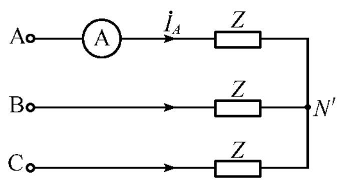
○11－6　题 11－6 图所示为对称的 Y－Y 三相电路，电源相电压为 220V，负载阻抗 $Z=(30+\text{j}20)\Omega$。求：

(1)图中电流表的读数；

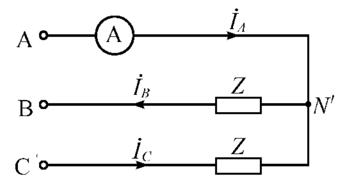
(2)三相负载吸收的功率；

(3)如果 A 的负载阻抗等于零(其他不变)，再求(1)、(2)；

(4)如果 A 相负载开路，再求(1)、(2)。



题 11－6 图



题解 11－6 图(a)

解 (1)令
$$\dot{U}_{\mathrm{AN}}=220\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

则
$$\dot{I}_{\mathrm{A}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{AN}}}{Z}=\frac{220\angle 0^\circ}{30+\mathrm{j}20}=6.1\angle -33.69^\circ\ \mathrm{A}$$

即电流表的读数为 6.1A。

(2)三相负载吸收的功率为 $P=3I_{\mathrm{A}}^2R=3\times 6.1^2\times 30=3349\mathrm{W}$

(3)如果 A 相的负载阻抗为零，则 $U'_{\mathrm{AN'}}=0$，即 A 与 N′等电位，如题解 11－6 图(a)所示。

则 $\dot{U}_{\mathrm{BN'}}=\dot{U}_{\mathrm{BA}}$ 即 $\dot{U}_{\mathrm{N'B}}=\dot{U}_{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}\dot{U}_{\mathrm{AN}}\angle 30^\circ=380\angle 30^\circ\ \mathrm{V}$

$\dot{U}_{\mathrm{CN'}}=\dot{U}_{\mathrm{CA}}$ 即 $\dot{U}_{\mathrm{CN'}}=\dot{U}_{\mathrm{AB}}\angle 120^\circ=380\angle 150^\circ\ \mathrm{V}$

$$\dot{I}_{\mathrm{B}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{N'B}}}{Z}=\frac{380\angle 30^\circ}{30+\mathrm{j}20}=10.54\angle -3.69^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{C}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{CA}}}{Z}=10.54\angle 116.31^\circ\ \mathrm{A}$$

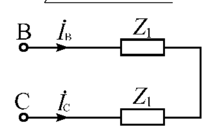
$$\dot{I}_{\mathrm{A}}=\dot{I}_{\mathrm{B}}-\dot{I}_{\mathrm{C}}=10.54\angle -3.69^\circ-10.54\angle 116.31^\circ=18.26\angle -33.7^\circ\ \mathrm{A}$$

即电流表的读数为 18.26A。

此时，三相负载吸收的功率变为

$P=I_{\mathrm{B}}^2R+I_{\mathrm{C}}^2R=2I_{\mathrm{B}}^2R=2\times 10.54^2\times 30$

$=6665.5\mathrm{W}\ (I_{\mathrm{B}}=I_{\mathrm{C}})$



图解 11－6 图(b)

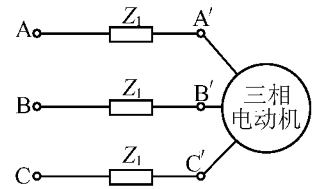
(4)如果 A 相负载开路，则变为单相电路，如题解 11－6 图(b)所示。此时电流表读数为零。

$$\dot{U}_{\mathrm{BC}}=\dot{U}_{\mathrm{AB}}\angle -120^\circ=\sqrt{3}\dot{U}_{\mathrm{AN}}\angle 30^\circ\cdot\angle -120^\circ=380\angle -90^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{B}}=-\dot{I}_{\mathrm{C}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{BC}}}{2Z}=\frac{380\angle -90^\circ}{2(30+\mathrm{j}20)}=5.27\angle -123.69^\circ\ \mathrm{A}$$

三相负载吸收的功率为 $P=2I_B^2R=2\times5.27^2\times30=1666.4\text{W}$

○11－7　题 11－7 图所示对称三相电路中，$U_{A'B'}=380\text{V}$，三相电动机吸收的功率为 1.4kW 其功率因数 $\lambda=0.866$（滞后），$z=-\text{j}55\Omega$。求 U_{AB} 和电源端的功率因数 λ'。



题 11－7 图

解　将三相电动机看做三相感性负载，其等效电路为如题解 11－7 图(a)所示。

题解 11－7 图(a)为三相对称电路，负载端 Y 连接，可作一相计算（以 A 相为例），如题解 11－7 图(b)所示。

令
$$\dot{U}_{A'N'}=\frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \text{V}$$

由已知条件知
$$P=1.4\text{kW}$$

又
$$P=3U_{A'N}I_A\cos\varphi_Z$$

得
$$I_A=\frac{P}{3U_{A'N}\cos\varphi_Z}=\frac{1.4\times10^3}{3\times220\times0.866}=2.45\text{A}$$

又知
$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=\arccos0.866=30^\circ$$

得
$$\varphi_i=-30^\circ$$

所以
$$\dot{I}_A=2.45\angle -30^\circ\ \text{A}$$

由题解 11－7 图(b)知

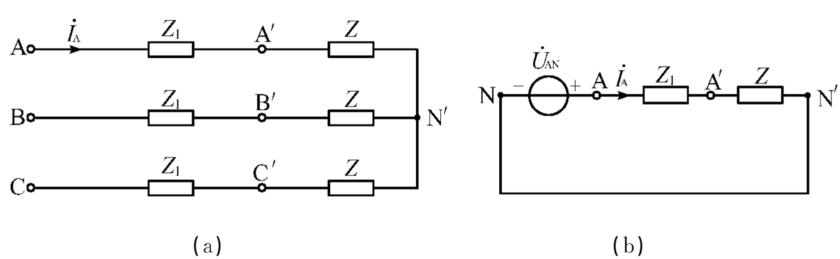
$$\dot{U}_{AN}=\dot{I}_A(Z_1+Z)=\dot{I}_AZ_1+\dot{U}_{A'N'}=2.45\angle -30^\circ\times(-\text{j}55)+220\angle 0^\circ$$
$$=192.13\angle -37.4^\circ\ \text{V}$$

则
$$\dot{U}_{AB}=\sqrt{3}\dot{U}_{AN}\angle 30^\circ=332.78\angle -7.4^\circ\ \text{V}$$

电源端的功率因数为

$\lambda'=\cos[-37.4^\circ-(-30^\circ)]=\cos(-7.4^\circ)=0.9917(\varphi_u=-37.4^\circ,\varphi_i=-30^\circ)$

本题中感性阻抗 $\lambda=0.866$，若为滞后，那么电流应超前电压 7.4°。

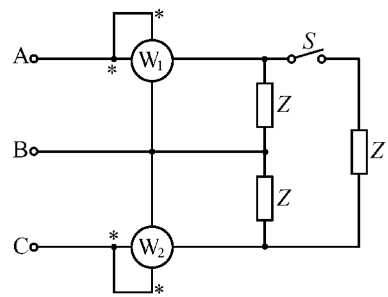


题解 11－7 图

○11－8　题 11－8 图所示对称的 Y－△三相电路，$U_{AB}=380\text{V}$，$Z=(27.5+\text{j}47.64)\Omega$。求：(1)图中功率表的读数及其代数和有无意义？(2)若开关 S 打开，再

求(1)。

解 (1)



题 11－8 图

$$P_1 = \mathrm{Re}[\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A]$$

$$P_2 = \mathrm{Re}[\dot{U}_{CB}\overset{*}{\dot{I}}_C]$$

$$P_1 + P_2 = \mathrm{Re}[\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A + \dot{U}_{CB}\overset{*}{\dot{I}}_C]$$

$$= \mathrm{Re}[(\dot{U}_A - \dot{U}_B)\overset{*}{\dot{I}}_A + (\dot{U}_C - \dot{U}_B)\overset{*}{\dot{I}}_C]$$

$$= \mathrm{Re}[\dot{U}_A\overset{*}{\dot{I}}_A - \dot{U}_B(\overset{*}{\dot{I}}_A + \overset{*}{\dot{I}}_C) + \dot{U}_C\overset{*}{\dot{I}}_C]$$

因为 $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$

所以 $P_1 + P_2 = \mathrm{Re}[\dot{U}_A\overset{*}{\dot{I}}_A + \dot{U}_B\overset{*}{\dot{I}}_B + \dot{U}_C\overset{*}{\dot{I}}_C]$
$= P$

可以看出，P_1 和 P_2 的读数没有什么意义，但 P_1 和 P_2 的代数和代表了三相电路负载吸收的总功率，这就是二瓦计法。

$$P_1 = \mathrm{Re}[\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A] = U_{AB}I_A\cos(\varphi_{uAB} - \varphi_{iA})$$
$$= U_1I_1\cos(\varphi_{uA} + 30° - \varphi_{iA}) = U_1I_1\cos(\varphi_Z + 30°)$$

同理， $$P_2 = U_1I_1\cos(\varphi_Z - 30°)$$

其中

$$U_1 = 380\mathrm{V},\quad Z = (27.5 + \mathrm{j}47.64)\Omega = 55.0\angle 60°\ \Omega$$

$$\varphi_Z = \arctan\frac{47.64}{27.5} = 60°,\quad I_1 = \sqrt{3}I_{AB} = \sqrt{3}\times\frac{380}{|Z|} = 11.967\mathrm{A}$$

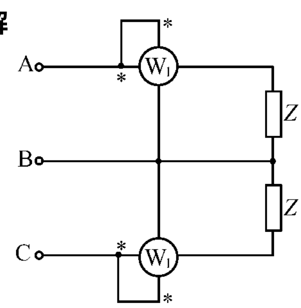
所以两功率表的读数为

$$W_1 = P_1 = U_1I_1\cos(\varphi_Z + 30°) = 0$$

$$W_2 = P_2 = U_1I_1\cos(\varphi_Z - 30°) = 380\times 11.967\cos(60° - 30°) = 3937.558\mathrm{W}$$

负载吸收的总功率为 $P = P_1 + P_2 = 3937.558\mathrm{W}$

(2)**开关** S **打开时，电路变为不对称三相电路如题解 11－8 图所示，但电源端仍为对称三相电源。**



题解 11－8 图

$$\dot{U}_{AB} = 380\angle 30°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{CB} = 380\angle 90°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = 6.91\angle -30°\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CB} = \frac{\dot{U}_{CB}}{Z} = 6.91\angle 30°\ \mathrm{A}$$

此时，两功率表的读数为

$$W_1 = P_1 = \mathrm{Re}(\dot{U}_{AB}\overset{*}{\dot{I}}_A) = \mathrm{Re}[380\angle 30^\circ \times 6.91\angle 30^\circ]$$
$$= 380 \times 6.91\cos 60^\circ = 1312.9\mathrm{W}$$

$$W_2 = P_2 = \mathrm{Re}(\dot{U}_{CB}\overset{*}{\dot{I}}_C) = \mathrm{Re}[380\angle 90^\circ \times 6.91\angle -30^\circ]$$
$$= 380 \times 6.91\cos 60^\circ = 1312.9\mathrm{W}$$

所以，负载所吸收的总功率为 $P_1 = P_1 + P_2 = 2625.8\mathrm{W}$

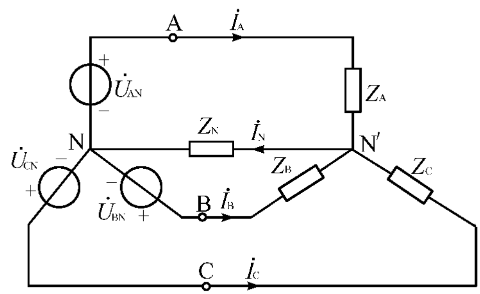
◎11－9　**已知不对称三相四线制电路中的端线阻抗为零，对称电源端的线电压** $U_1 = 380\mathrm{V}$，**不对称的星形连接负载分别是** $Z_A = (3+\mathrm{j}2)\Omega$，$Z_B = (4+\mathrm{j}4)\Omega$，$Z_C = (2+\mathrm{j}1)\Omega$。**试求：**

(1)**当中线阻抗** $Z_N = (4+\mathrm{j}3)\Omega$ **时的中点电压、线电流和负载吸收的总功率；**

(2)**当** $Z_N = 0$ **且** A **相开路时的线电流。如果无中线（即** $Z_N = \infty$**）又会怎样？**

分析　列写结点电压方程，进行求解即可。

解　如题解 11－9 图为不对称三相四线制电路。



题解 11－9 图

(1)设　$$\dot{U}_{AN} = \frac{U_1}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ = 220\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

则　$$\dot{U}_{BN} = 220\angle -120^\circ\ \mathrm{V},\quad \dot{U}_{CN} = 220\angle 120^\circ\ \mathrm{V}$$

列结点电压方程为　$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_N}\right)\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AN}}{Z_A} + \frac{\dot{U}_{BN}}{Z_B} + \frac{\dot{U}_{CN}}{Z_C}$$

代入已知条件，得　$$\dot{U}_{N'N} = 50.09\angle 115.52^\circ\ \mathrm{V}$$

从而有　$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N}}{Z_A} = \frac{220\angle 0^\circ - 50.09\angle 115.52^\circ}{3+\mathrm{j}2} = 68.17\angle -44.29^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN} - \dot{U}_{N'N}}{Z_B} = \frac{220\angle -120^\circ - 50.09\angle 115.52^\circ}{4+\mathrm{j}4} = 44.51\angle 115.52^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N}}{Z_C} = \frac{220\angle 120^\circ - 50.09\angle 115.52^\circ}{2+\mathrm{j}1} = 76.07\angle 94.76^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_N=\frac{\dot{U}_{N'N}}{Z_N}=\frac{50.09\angle 115.52^\circ}{4+j3}=10.02\angle 78.65^\circ\ \text{A}$$

负载吸收的总功率为

$$P=I_A^2R_A+I_B^2R_B+I_C^2R_C=68.17^2\times3+44.51^2\times4+76.07^2\times2=33.439\text{kW}$$

(2)当 $Z_N=0$ 且 A 相开路时，有 $\dot{U}_{N'N}=0$，$\dot{I}_A=0$，B 相和 C 相不受影响。

$$\dot{I}_B=\frac{\dot{U}_{BN}}{Z_B}=\frac{220\angle -120^\circ}{4+j4}=38.89\angle -165^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{CN}}{Z_C}=\frac{220\angle 120^\circ}{2+j1}=98.39\angle 93.43^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_N=\dot{I}_B+\dot{I}_C=38.89\angle -165^\circ+98.39\angle 93.43^\circ=98.28\angle 116.43^\circ\ \text{A}$$

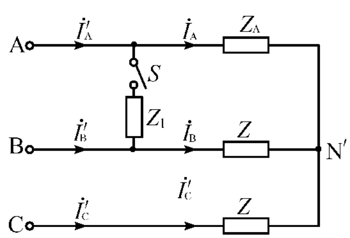
如果无中线，且 A 相开路时，有 $\dot{I}_N=0$，$\dot{I}_A=0$，则

$$\dot{I}_B=-\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_{BN}-\dot{U}_{CN}}{Z_B+Z_C}=\frac{380\angle -90^\circ}{6+j5}=48.66\angle -129.81^\circ\ \text{A}$$

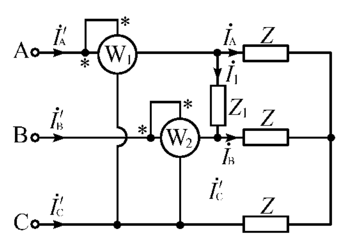
○11－10　题 11－10 图所示电路中，对称三相电源端的线电压 $U_1=380$V，$Z=(50+j50)\Omega$，$Z_1=(100+j100)\Omega$，Z_A 为 R、L、C 串联组成 $R=50\Omega$，$X_L=314\Omega$，$X_C=-264\Omega$。试求：

(1)开关 S 打开时的线电流；

(2)若用二瓦计法测量电源端三相功率，试画出接线图，并求两个功率表的读数(S 闭合时)。



题 11－10 图



题解 11－10 图

解　(1)开关 S 打开时，各电流参考方向如题 11－10 图所示。

$$Z_A=50+j(314-264)=(50+j50)\Omega=Z$$

可见 S 打开时，为对称三相电路，可归为一相计算。

令
$$\dot{U}_{AN}=\frac{1}{\sqrt{3}}U_1\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ$$

则
$$\dot{I}'_A=\dot{I}_A=\frac{220\angle 0^\circ}{50+j50}=3.11\angle -45^\circ\ \text{A}$$

根据对称性：

$$\dot{I}'_{\mathrm{B}}=\dot{I}_{\mathrm{B}}=3.11\angle{-165^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}'_{\mathrm{C}}=3.11\angle{75^\circ}\ \mathrm{A}$$

(2)开关 S 闭合时，用二瓦计法测量电源端三相功率的接线图如题解 11－10 图所示。

其中 $W_1=P_1=\mathrm{Re}(\dot{U}_{\mathrm{AC}}\overset{*}{\dot{I}'_{\mathrm{A}}})=U_{\mathrm{AC}}I'_A\cos(\varphi_{\dot{U}_{\mathrm{AC}}}-\varphi_{\dot{I}'_{\mathrm{A}}})$

$W_2=P_2=\mathrm{Re}(\dot{U}_{\mathrm{BC}}\overset{*}{\dot{I}'_{\mathrm{B}}})=U_{\mathrm{BC}}I'_{\mathrm{B}}\cos(\varphi_{\dot{U}_{\mathrm{BC}}}-\varphi_{\dot{I}'_{\mathrm{B}}})$

开关 S 闭合后，负载端不对称　$I'_{\mathrm{A}}=\dot{I}_1+\dot{I}_{\mathrm{A}}$，　$\dot{I}'_{\mathrm{B}}=-\dot{I}_1+\dot{I}_{\mathrm{B}}$

又　$\dot{U}_{\mathrm{AB}}=380\angle{30^\circ}\ \mathrm{V}(\dot{U}_{\mathrm{AN}}=220\angle{0^\circ}\ \mathrm{V})$

$\dot{U}_{\mathrm{BC}}=380\angle{-90^\circ}\ \mathrm{V}$

$\dot{U}_{\mathrm{AC}}=-\dot{U}_{\mathrm{CA}}=380\angle{-30^\circ}\ \mathrm{V}$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_{\mathrm{AB}}}{Z_1}=\frac{380\angle{30^\circ}}{100+\mathrm{j}100}=2.687\angle{-15^\circ}\ \mathrm{A}$$

$\dot{I}_{\mathrm{A}}=3.11\angle{-45^\circ}\ \mathrm{A}$

$\dot{I}_{\mathrm{B}}=3.11\angle{-165^\circ}\ \mathrm{A}$

从而　$\dot{I}'_{\mathrm{A}}=\dot{I}_1+\dot{I}_{\mathrm{A}}=2.687\angle{-15^\circ}+3.11\angle{-45^\circ}=5.60\angle{-31.12^\circ}\ \mathrm{A}$

$\dot{I}'_{\mathrm{B}}=-\dot{I}_1+\dot{I}_{\mathrm{B}}=-2.687\angle{-15^\circ}+3.11\angle{-165^\circ}=5.60\angle{-178.87^\circ}\ \mathrm{A}$

所以　$W_1=U_{\mathrm{AC}}I'_{\mathrm{A}}\cos(\varphi_{\dot{U}_{\mathrm{AC}}}-\varphi_{\dot{I}'_{\mathrm{A}}})=380\times5.60\cos[-30^\circ-(-31.12^\circ)]$

$=380\times5.60\cos1.12^\circ=2127.6\mathrm{W}$

$W_2=U_{\mathrm{BC}}I'_B\cos(\varphi_{\dot{U}_{\mathrm{BC}}}-\varphi_{\dot{I}'_{\mathrm{B}}})=380\times5.60\cos[-90^\circ-(-178.87^\circ)]$

$=380\times5.60\cos88.87^\circ=41.97\mathrm{W}$

○11－11　略

○11－12　已知对称三相电路的负载吸收的功率为 2.4kW，功率因数为 0.4(感性)。试求：

(1)两个功率表的读数(用二瓦计法测量功率时)；

(2)怎样才能使负载端的功率因数提高到 0.8？并再求出两个功率表的读数。

解　(1)用二瓦计法测量功率时的接线图见课本 P257，且有

$$P_1=U_1I_1\cos(\varphi-30^\circ),\quad P_2=U_1I_1\cos(\varphi+30^\circ)$$

由题意，知　　$\varphi=\arccos0.4=66.422^\circ$(感性)

由 $P=\sqrt{3}U_1I_1\cos\varphi=2.4\times1000\mathrm{W}$ 可得

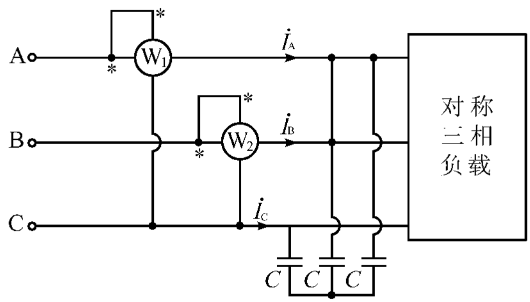
$$U_1I_1=\frac{P}{\sqrt{3}\cos\varphi}=\frac{2.4\times1000}{\sqrt{3}\times0.4}=3.464\times10^3$$

所以，两功率表的读数为

$$W_1=P_1=U_1I_1\cos(\varphi-30°)=3.464\times10^3\cos(66.422°-30°)=2.787\text{kW}$$

$$W_2=P_2=U_1I_1\cos(\varphi+30°)=3.464\times10^3\cos(66.422°+30°)=-0.387\text{kW}$$

(2)欲提高三相负载的功率因数，可在负载端并联对称三相星形连接的电容器组以补偿无功功率(原理同单相电路分析)，如题解 11－12 图所示。



题解 11－12 图

并联电容前，　　$\varphi=\arccos0.4=66.422°$

并联电容后，　　$\varphi'=\arccos0.8=36.87°$

三相负载的总有功功率 $P=2.4\times10^3$ W 在并联电容前后保持不变。

设并联电容后两功率表的读数分别为 P'_1 和 P'_2，则有

$$P'_1+P'_2=2.4\times10^3 \quad ①$$

$$\frac{P'_1}{P'_2}=\frac{\cos(\varphi'-30°)}{\cos(\varphi'+30°)}=2.53 \quad ②$$

联立式①式②，得　$W_2=P'_2=\dfrac{2.4\times10^3}{1+2.53}=0.68\text{kW}$

$$W_1=P'_1=2.4-0.68=1.72\text{kW}$$

并联电容所补偿的无功功率为

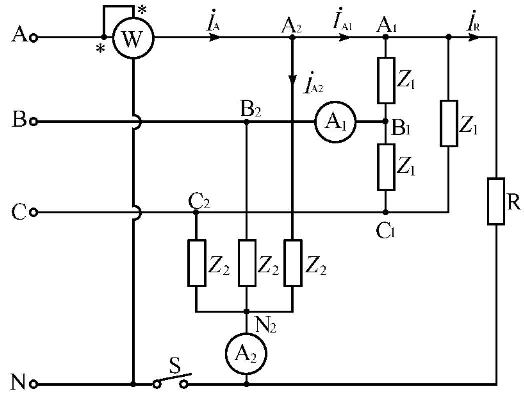
$$Q_C=P(\tan\varphi'-\tan\varphi)=2.4(\tan36.87°-\tan66.422°)=-3.699\text{kvar}$$

●11－13　题 11－13 图所示三相(四线)制电路中，$Z_1=-\text{j}10\Omega$，$Z_2=(5+\text{j}12\Omega)$，对称三相电源的线电压为 380V，图中电阻 R 吸收的功率为 24 200W(S 闭合时)。试求：

(1)开关 S 闭合时图中各表的读数。根据功率表的读数能否求得整个负载吸收的总功率；

(2)开关 S 打开时图中各表的读数有无变化，功率表的读数有无意义？

分析　根据线电压、相电压关系及功率公式求解即可。



题 11－13 图

解　(1)开关 S 闭合时,三角形连接的负载端 A_1,B_1,C_1 和星形连接的负载端 A_2,B_2,C_2 处的线电压均为电源端的线电压。

从电路图中可知,电流表 A_1 的读数为三角形连接的线电流;电流表 A_2 的读数为星形连接中的线电流,因星形连接为对称电路,所以 $A_2=0$。

令
$$\dot U_{AN}=\frac{U_1}{\sqrt3}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ\ \text{V}$$

则
$$\dot U_{AB}=380\angle 30^\circ\ \text{V}$$

所以
$$\dot I_{A1B1}=\frac{\dot U_{AB}}{Z_1}=\frac{380\angle 30^\circ}{-\text{j}10}=38\angle 120^\circ\ \text{A}$$

$$\dot I_{A1}=\sqrt3\dot I_{A1B1}\angle -30^\circ=65.82\angle 90^\circ\ \text{A}$$

利用对称性:$\dot I_{B1}=65.82\angle -30^\circ\ \text{A}$,即 $A_1=65.82\text{A}$

又 $\dot I_{A2}=\dfrac{\dot U_{AN}}{Z_2}=\dfrac{220\angle 0^\circ}{5+\text{j}12}=16.92\angle -67.38^\circ\ \text{A}$

$$\dot I_R=\frac{\dot U_{AN}}{R}=\frac{P_R}{U_{AN}}\angle 0^\circ=\frac{24200}{220}\angle 0^\circ=110\angle 0^\circ\ \text{A}$$

所以 $\dot I_A=\dot I_{A1}+\dot I_{A2}+\dot I_R$

$$=65.82\angle 90^\circ+16.92\angle -67.38^\circ+110\angle 0^\circ=126.86\angle 23.31^\circ\ \text{A}$$

功率表的读数为 $W=P_A=U_{AN}I_A\cos(\varphi_{\dot U_{AN}}-\varphi_{\dot I_A})$

$$=220\times126.86\cos(0^\circ-23.31^\circ)=25.63\text{kW}$$

从电路图中知
$$P_A=\frac13P_Y+\frac13P_\Delta+P_R \qquad ①$$

而整个负载吸收的功率为 $P=P_Y+P_\Delta+P_R$ ②

由此可见，根据功率表的读数 P_A 的值可求得整个负载吸收的总功率。

由式①得 $P_Y+P_\Delta=3(P_A-P_R)$

代入式②得

$$P=3(P_A-P_R)+P_R=3P_A-2P_R$$
$$=3\times25.63-2\times24.2=28.49\text{kW}$$

(2)开关 S 打开时，N 点与 N_2 点无中线，可见阻抗 Z_1 的三角形连接的对称电路不受影响，所以Ⓐ₁的读数不变仍为 65.82A；而阻抗为 Z_2 构成的星形连接由于在 A 相处并联了电阻 R，从而构成不对称三相星形连接，Ⓐ₂的读数发生变化，而不为零。即Ⓐ₂的值等于 I_R，如题解 11－13 图所示。

由题解 11－13 图知

$$\dot{U}_{N_2N}=\frac{(\dot{U}_{AN}+\dot{U}_{BN}+\dot{U}_{CN})/Z_2+\dot{U}_{AN}/R}{\dfrac{3}{Z_2}+\dfrac{1}{R}}=\frac{220\angle0^\circ/2}{\dfrac{3}{5+\text{j}12}+\dfrac{1}{2}}$$
$$=175.72\angle19.89^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}_{AN}-\dot{U}_{N2N}}{R}=\frac{220\angle0^\circ-175.72\angle19.89^\circ}{2}$$
$$=40.54\angle-47.51^\circ\ \text{A}$$

即 $I_{A2}=40.54\text{A}$

又

$$\dot{I}_{A2}=\frac{\dot{U}_{AN}-\dot{U}_{N_2N}}{Z_2}=\frac{220\angle0^\circ-175.72\angle19.89^\circ}{5+\text{j}12}$$
$$=6.24\angle-114.89^\circ\ \text{A}$$

由题 11－13 图知，

$$\dot{I}_A=\dot{I}_{A1}+\dot{I}_{A2}+\dot{I}_R$$
$$=65.82\angle90^\circ+6.24\angle-114.89^\circ+40.54\angle-47.51^\circ=39.10\angle50.72^\circ\ \text{A}$$

所以，功率表的读数为

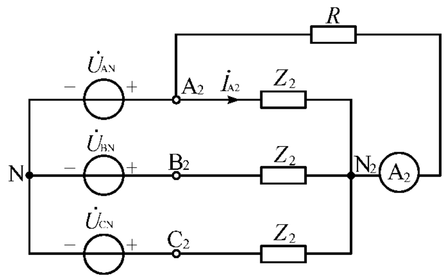
$$W=U_{AN}I_A\cos(\varphi_{\dot{U}_{AN}}-\varphi_{\dot{I}_A})=220\times39.10\cos(0-50.72^\circ)=5.45\text{kW}$$

从 W 的计算过程可知，功率表的读数不是对称三相电路中的 A 相负载的有功功率，而只是 A 相电源的功率。

小结 功率表的读数非负载功率，而是电源功率。

●11－14 题 11－14 图所示的对称三相电路，线电压为 380V，$R=200\Omega$，负载吸收的无功功率为 $1520\sqrt{3}$var。试求：(1)各线电流；(2)电源发出的复功率。

分析 根据线电压、线电流关系及复功率定义求解即可。



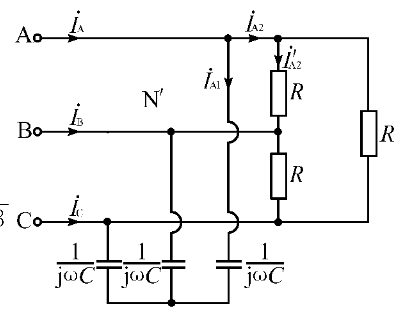
题解 11－13 图

解　令 $\dot{U}_{AN}=\dfrac{U_1}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ=220\angle 0^\circ$ V

则 $\dot{U}_{AB}=380\angle 30^\circ$ V

$$\dot{I}'_{A2}=\frac{\dot{U}_{AB}}{R}=\frac{380}{200}\angle 30^\circ=1.9\angle 30^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{A2}=\sqrt{3}\dot{I}'_{A2}\angle -30^\circ=3.29\angle 0^\circ\ \text{A}$$



题 11－14 图

又已知　$Q=\sqrt{3}U_1I_{A1}\sin(-90^\circ)=-1520\sqrt{3}$ var

所以　$I_{A1}=\dfrac{-1520\sqrt{3}}{\sqrt{3}U_1\sin(-90^\circ)}=\dfrac{-1520\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\times 380}=$ 4A

$$\dot{I}_{A1}=j\omega\dot{C}U_{AN}=4\angle 90^\circ\ \text{A}$$

因此　$\dot{I}_A=\dot{I}_{A1}+\dot{I}_{A2}=4\angle 90^\circ+3.29\angle 0^\circ=5.18\angle 50.56^\circ$ A

利用对称性，知　$\dot{I}_B=5.18\angle -69.44^\circ$ A，$\dot{I}_C=5.18\angle 170.56^\circ$ A

(2)**由于是对称三相电路，所以三相电源发出的复功率为**

$$\overline{S}=3\overline{S}_A=3(\dot{U}_{AN}\overset{*}{I}_A)=3\times 220\angle 0^\circ\times 5.18\angle -50.56^\circ$$

$$=3418.8\angle -50.56^\circ\ \text{V}\cdot\text{A}=(2171.9-j2640.3)\text{V}\cdot\text{A}$$

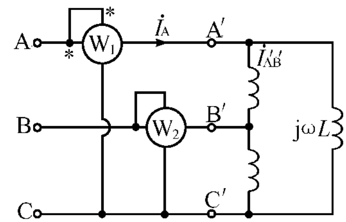
小结　对于对称三相电路，三相电源发出的复功率 $\overline{S}$ 为各电源发出的复功率的 3 **倍**。

○11－15　**题** 11－15 **图所示为对称三相电路，线电压为** 380V，**相电流** $I_{A'B'}=2$A。**求图中功率表的读数**。

解　设
$$\dot{U}_{AB}=380\angle 0^\circ\ \text{V}=\dot{U}_{A'B'}$$

则
$$\dot{U}_{AC}=-\dot{U}_{CA}=380\angle -60^\circ\ \text{V}$$

又 $$\dot{I}_{A'B'}=-j\frac{\dot{U}_{A'B'}}{\omega L}$$



题 11－15 图

所以 $$\dot{I}_{A'B'}=2\angle{-90^\circ}\ \text{A}$$

因此，$\dot{I}_A=\sqrt{3}\dot{I}_{A'B'}\angle{-30^\circ}=3.464\angle{-120^\circ}\ \text{A}$

从而，$W_1=\text{Re}[\dot{U}_{AC}\overset{*}{I}_A]=380\times3.464\cos(-60^\circ+120^\circ)=658.2\text{W}$

又 $W_1+W_2=0$（对称负载为纯电感，不吸收有功功率。）

所以 $$W_2=-658.2\text{W}$$

○11－16　$L=110.32\text{mH}$，　$C=91,94\mu\text{F}$

第十二章

非正弦周期电流电路和信号的频谱

学习要求

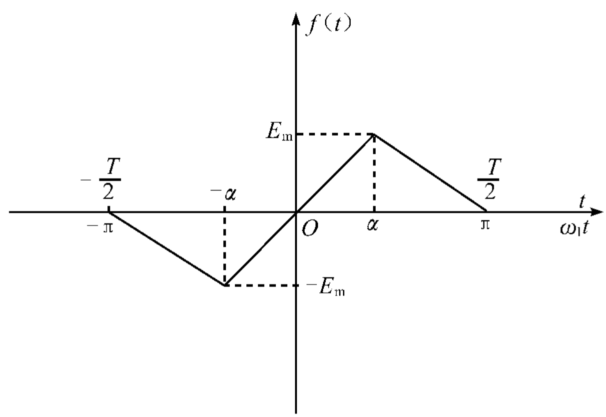
1. 知道什么叫非正弦周期信号，会求非正弦周期信号的周期 T、频率 f、角频率 ω。
2. 了解傅里叶级数的意义，能将简单常用的非正弦周期信号展开成三角函数形式或指数形式的傅里叶级数；知道什么叫谐波分析。
3. 了解非正弦周期信号有效值与平均值的定义，并会求 X 非正弦周期电压与电流的有效值。
4. 深刻理解非正弦周期电流电路中平均功率的定义并会求解。
5. 会根据叠加定理对非正弦周期电流稳态电路进行分析计算，包括电压、电流与平均功率的计算。
6. 知道什么叫线性失真（幅度失真，相位失真）及线性失真产生的原因。
7. 了解对称三相电路中高次谐波的基本概念；了解非周期信号的正、反傅里叶变换；知道什么叫信号的频谱及频谱的意义。

知识网络图

- 非正弦周期电流电路和信号的频谱
  - 非正弦周期信号
    - 周期函数分解为傅里叶级数
    - 有效值
    - 平均值
  - 非正弦周期信号电路
    - 电路的分析计算
      - 谐波分析法
      - 对称三相非正弦稳态电路
    - 平均功率问题
    - 傅里叶积分

课后习题全解

○ 12－1　**求题 12－1 图所示波形的傅里叶级数的系数。**



题 12－1 图

解　$f(t)$ **在第一个周期**$(\omega_1 T = 2\pi)$**内的表达式为**

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{E_m}{\pi-\alpha}(\omega_1 t+\pi) & -\pi\leqslant\omega_1 t<-\alpha\\ \dfrac{E_m}{\alpha}(\omega_1 t) & -\alpha\leqslant\omega_1 t<\alpha\\ -\dfrac{E_m}{\pi-\alpha}(\omega_1 t-\pi) & \alpha\leqslant\omega_1 t\leqslant\pi\end{cases}$$

显然，$f(t)$ **为奇函数。**$f(t)$ **展开为傅里叶级数为**

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega_1 t)+b_k\sin(k\omega_1 t)]$$

由于 $f(t)$ 为奇函数。所以，有 $a_0=0, a_k=0$。而

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\left[\frac{E_m}{\alpha}(\omega_1 t)\sin(k\omega_1 t)\right]\mathrm{d}(\omega_1 t)+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{E_m}{\alpha-\pi}(\omega_1 t-\pi)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}(\omega_1 t)\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{E_m}{\alpha}\left[-\frac{\omega_1 t}{k}\cos(k\omega_1 t)+\frac{1}{k^2}\sin(k\omega_1 t)\right]\Bigg|_0^{\alpha}\right.\\
&\quad \left.+\frac{E_m}{\alpha-\pi}\left[\frac{\pi}{k}\cos(k\omega_1 t)-\frac{\omega_1 t}{k}\cos(k\omega_1 t)+\frac{1}{k^2}\sin(k\omega_1 t)\right]\Bigg|_{\alpha}^{\pi}\right\}\\
&= \frac{2E_m}{k^2\alpha(\pi-\alpha)}\sin(k\alpha) \qquad (k=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}
$$

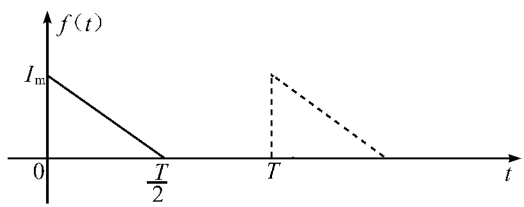
○ 12－2　**已知某信号半周期的波形如题 12－2 图所示。试在下列各不同条件下画出整个周期的波形：**

(1) $a_0=0$；

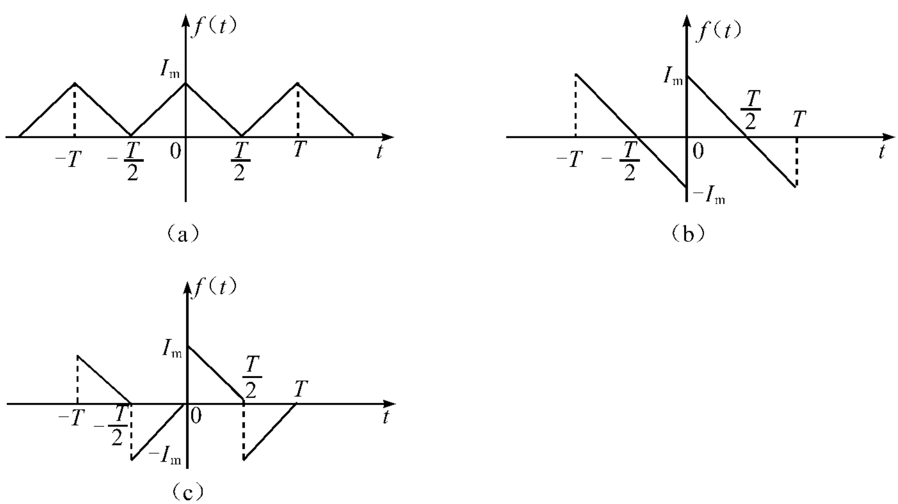
(2) 对所有 k，$b_k=0$；

(3) 对所有 k，$a_k=0$；

(4) a_k 和 b_k 为零，当 k 为偶数时。



题 12－2 图



题解 12－2 图

解　(1) 当 $a_0 = 0$ 时，在后半个周期上，只要画出 $f(t)$ 的负波形与横轴(t 轴)所围面积与已给出的前半个周期波形所围面积相等即可。题解 12－2 图中的(b)，(c) 图均满足此条件。

(2) 对所有 $k, b_k = 0, f(t)$ 应为偶函数，即有 $f(t) = f(-t)$，波形如题解 12－2 图(a) 所示，波形对称于纵轴。

(3) 对所有 $k, a_k = 0, f(t)$ 应为奇函数，即 $f(t) = -f(-t)$，波形如题解 12－2 图(b) 所示，波形对称于原点。

(4) a_k 和 b_k 为零，当 k 为偶数时，此时，$f(t)$ 称为奇谐波函数，即 a_k 和 b_k 只出现在 k 为奇数时，函数 $f(t)$ 满足镜像对称性质，即有 $f(t) = -f(t+\frac{T}{2})$，波形如题解 12－2 图(c) 所示。

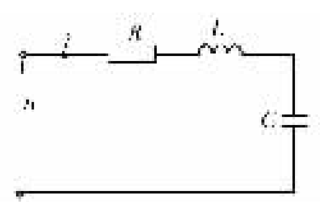
◎12－3　一个 RLC 串联电路，其 $R = 11\Omega, L = 0.015H, C = 70\mu F$ 外加电压为

$$u(t) = [11 + 141.4\cos(1000t) - 35.4\sin(2000t)]\text{V}$$

试求电路中的电流 $i(t)$ 和电路消耗的功率。

分析　根据相量关系，即可求解出 $\dot{I}$，既而可得 $i(t)$，电路消耗的功率为各个功率之和。

解　RLC 串联电路如题解 12－3 图所示，电路中的非正弦周期电压 $u(t)$ 为已知，分别有直流分量、基波和二次谐波分量。可写出电流相量的一般表达式



题解 12－3 图

$$\dot{I}_{(k)} = \frac{\dot{U}_{(k)}}{R + \text{j}(k\omega L - \frac{1}{k\omega C})}$$

其中，$\omega L = 15\Omega, \frac{1}{\omega C} = 14.286\Omega$。

电压分量分别作用产生的电流和功率分量为：

(1) 直流 $U_0 = 11\text{V}$ 作用时，电感 L 为短路，电容 C 为开路，故，$I_0 = 0, P_0 = 0$。

(2) 基波($k = 3$) 作用时，令 $\dot{U}_{(1)} = 100\angle 0^\circ$ V

$$Z_{(1)} = R + \text{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = (11 + \text{j}0.714)\Omega = 11.023\angle 3.71^\circ \text{ A}$$

故

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{100\angle 0^\circ}{11.023\angle 3.71^\circ} = 9.072\angle -3.71^\circ \text{ A}$$

$$P_{(1)} = I_{(1)}^2 R = 905.28\text{W}$$

(3) 二次谐波($k = 2$) 作用时，令

$$\dot{U}_{(2)} = \frac{35.4}{\sqrt{2}}\angle 90^\circ = 25.032\angle 90^\circ\ \text{V}$$

$$Z_{(2)} = R + j(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}) = 11 + j(30 - \frac{1}{2}\times 14.286) = 25.366\angle 64.3^\circ\ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{(2)} = \frac{\dot{U}_{(2)}}{Z_{(2)}} = \frac{25.032\angle 90^\circ}{25.366\angle 64.3^\circ} = 0.987\angle 25.7^\circ\ \text{A}$$

$$P_{(2)} = I_{(2)}^2 R = (0.987)^2 \times 11 = 10.716\text{W}$$

所以，电路中的电流 $i(t)$ 为

$$\begin{aligned} i(t) &= 0 + \sqrt{2}\times 9.072\cos(1000t - 3.71^\circ) + \sqrt{2}\times 0.987\cos(2000t + 25.7^\circ) \\ &= 12.83\cos(1000t - 3.71^\circ) - 1.396\sin(2000t - 64.3^\circ)\text{A} \end{aligned}$$

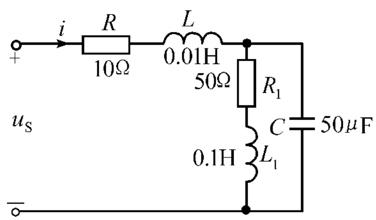
电路消耗的功率

$$P = P_0 + P_{(1)} + P_{(2)} = 905.28 + 10.716 = 916\text{W}$$

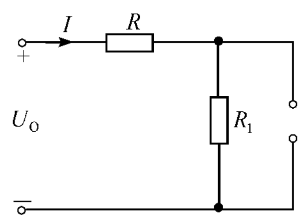
○ 12－4　电路如题 12－4 图所示，电源电压为

$$u_S(t) = [50 + 100\sin(314t) - 40\cos(628t) + 10\sin(942t + 20^\circ)]\text{V}$$

试求电流 $i(t)$ 和电源发出的功率及电源电压和电流的有效值。



题 12－4 图



题解 12－4 图

解　设电流 $i(t)$ 第 k 次谐波的相量为 $\dot{I}_m(k)$（采用振幅相量）。

(1) 当 $k = 0$，直流分量 $U_0 = 50\text{V}$ 作用时，电路如题解 12－4 图所示，有

$$Z_0 = R + R_1 = 60\Omega$$

故

$$I_0 = \frac{U_0}{Z_0} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}\text{A}$$

$$P_{S(0)} = U_0 I_0 = 50 \times \frac{5}{6} = 41.667\text{W}$$

(2) 当 $k = 1$，即 $\omega = \omega_1 = 314\text{rad/s}$，基波相量 $\dot{U}_{Sm(1)} = 100\angle -90^\circ\ \text{V}$ 作用时，有

$$Z_{(1)}=10+\mathrm{j}3.14+\frac{1}{\mathrm{j}0.0157+\dfrac{1}{50+\mathrm{j}31.4}}=71.267\angle{-19.31^\circ}\ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{\mathrm{m}(1)}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{Sm}(1)}}{Z_{(1)}}=\frac{100\angle{-90^\circ}}{71.267\angle{-19.31^\circ}}=1.403\angle{-70.69^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$P_{\mathrm{S}(1)}=\frac{1}{2}U_{\mathrm{Sm}(1)}I_{\mathrm{m}(1)}\cos(-19.31^\circ)=\frac{1}{2}\times100\times1.403\cos(19.31^\circ)$$
$$=66.2\mathrm{W}$$

(3) 当 $k=2$，即 $\omega=2\omega_1=628\mathrm{rad/s}$，二次谐振相量 $\dot{U}_{\mathrm{Sm}(2)}=-40\angle{0^\circ}\ \mathrm{V}$ 作用时，有

$$Z_{(2)}=10+\mathrm{j}6.28+\frac{1}{\mathrm{j}0.0314+\dfrac{1}{50+\mathrm{j}62.8}}=42.528\angle{-54.552^\circ}\ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{\mathrm{m}(2)}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{Sm}(2)}}{Z_{(2)}}=\frac{-40\angle{0^\circ}}{42.528\angle{-54.552^\circ}}=0.941\angle{-125.448^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$P_{\mathrm{S}(2)}=\frac{1}{2}U_{\mathrm{Sm}(2)}I_{\mathrm{Sm}(2)}\cos(-54.552^\circ)=\frac{1}{2}\times40\times0.941\times\cos(54.552^\circ)$$
$$=10.915\mathrm{W}$$

(4) 当 $k=3$，即 $\omega=3\omega_1=942\mathrm{rad/s}$，三次谐波相量 $\dot{U}_{\mathrm{Sm}(3)}=10\angle{-70^\circ}\ \mathrm{V}$ 作用时，有

$$Z_{(3)}=10+\mathrm{j}9.42+\frac{1}{\mathrm{j}0.0471+\dfrac{1}{50+\mathrm{j}94.2}}=20.552\angle{-51.19^\circ}\ \Omega$$

故

$$\dot{I}_{\mathrm{m}(3)}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{Sm}(3)}}{Z_{(3)}}=\frac{10\angle{-70^\circ}}{20.552\angle{-51.19^\circ}}=0.487\angle{-18.81^\circ}\ \mathrm{A}$$

$$P_{\mathrm{S}(3)}=\frac{1}{2}U_{\mathrm{Sm}(3)}I_{\mathrm{m}(3)}\cos(-51.19^\circ)=\frac{1}{2}\times10\times0.487\cos51.19^\circ=1.526\mathrm{W}$$

所以，电流 $i(t)$ 为

$$i(t)=0.833+1.403\sin(314t+19.31^\circ)-0.941\cos(628t+54.552^\circ)+0.487\sin(942t+71.19^\circ)\mathrm{A}$$

电源发出的平均功率 P_{S} 为

$$P_{\mathrm{S}}=P_{\mathrm{S}(0)}+P_{\mathrm{S}(1)}+P_{\mathrm{S}(2)}+P_{\mathrm{S}(3)}=41.667+66.2+10.915+1.526=$$

120.308W

电源电压有效值

$$U_S=\sqrt{U_0^2+\frac{U_{Sm(1)}^2}{2}+\frac{U_{Sm(2)}^2}{2}+\frac{U_{Sm(3)}^2}{2}}=\sqrt{50^2+\frac{100^2}{2}+\frac{40^2}{2}+\frac{10^2}{2}}$$
$$=91.378V$$

电源电流有效值

$$I=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1.403^2}{2}+\frac{0.941^2}{2}+\frac{0.487^2}{2}}=1.497A$$

○ 12－5　**有效值为 100V 的正弦电压加在电感 L 两端时，得电流 $I=10A$，当电压有 3 次谐波分量，而有效值仍为 100V 时，得电流 $I=8A$。试求这一电压的基波和 3 次谐振电压的有效值。**

解　根据题意得，可求得基波时的感抗为

$$|Z_{L1}|=\omega L=\frac{100}{10}=10\Omega$$

故，三次谐波时的感抗为

$$|Z_{L3}|=3\omega L=30\Omega$$

所以，含基波和三次谐波的电压和电流有效值应满足下列关系式

$$U_1^2+U_3^2=100^2$$
$$\left(\frac{U_1}{|Z_{L1}|}\right)^2+\left(\frac{U_3}{|Z_{L3}|}\right)^2=8^2$$

代入参数值并整理得

$$U_1^2+U_3^2=100^2$$
$$9U_1^2+U_3^2=64\times900$$

解之，得

$$U_1=\sqrt{\frac{64\times900-100^2}{8}}=77.14V$$
$$U_3=\sqrt{100^2-77.14^2}=63.64V$$

◎12－6　**已知一 RLC 串联电路的端口电压和电流为**

$$u(t)=[100\cos(314t)+50\cos(942t-30°)]V$$
$$i(t)=[10\cos(314t)+1.775\cos(942t+\theta_3)]A$$

试求：(1)R,L,C **的值**；

(2)θ_3 **的值**；

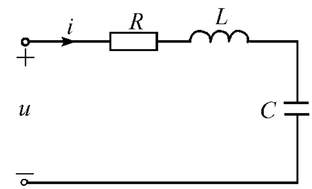
(3) **电路消耗的功率**。

分析　运用相量法求解即可。

解 RLC 串联电路如题解12－6图所示，电路中的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 均为已知，分别含有基波和三次谐波分量。

(1) 由于基波的电压和电流同相位，所以，RLC 电路在基波频率下发生串联谐振。故有

$$R = \frac{U_{m1}}{I_{m1}} = \frac{100}{10} = 10\Omega$$



题解 12－6 图

且

$$X_{L1} = X_{C1} = X_1$$

即

$$\omega_1 L = \frac{1}{\omega_1 C} = X_1 \qquad (\omega_1 = 314\text{rad/s})$$

而三次谐波的阻抗为

$$Z_3 = R + \text{j}3\omega_1 L - \text{j}\frac{1}{3\omega_1 C} = 10 + \text{j}(3X_1 - \frac{1}{3}X_1) = 10 + \text{j}\frac{8}{3}X_1$$

Z_3 的模值为

$$|Z_3| = \sqrt{10^2 + (\frac{8}{3}X_1)^2} = \frac{U_{m3}}{I_{m3}} = \frac{50}{1.755} = 28.49\Omega$$

解得 X_1 为

$$X_1 = \sqrt{(28.49^2 - 10^2) \times \frac{9}{64}} = 10.004\Omega$$

故

$$L = \frac{X_1}{\omega_1} = \frac{10.004}{314} = 31.86\text{mH}$$

$$C = \frac{1}{X_1\omega_1} = \frac{1}{314 \times 10.004} = 318.34\mu\text{F}$$

(2) 三次谐波时，Z_3 的阻抗角为

$$\varphi_3 = \arctan\frac{\frac{8}{3} \times 10.004}{10} = \arctan 2.668 = 69.45^\circ$$

而

$$\varphi_3 = \varphi_{Um3} - \varphi_{Im3} = -30^\circ - \theta_3$$

则

$$\theta_3 = -30^\circ - \varphi_3 = -99.45^\circ$$

(3) 电路消耗的功率 P 为

$$P = \frac{1}{2} \times 100 \times 10 + \frac{1}{2} \times 50 \times 1.775\cos 69.45^\circ = 515.4\text{W}$$

○ 12－7　题 12－7 图所示电路各电源的电压为

$U_0 = 60\text{V}$

$u_1 = [100\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 20\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)]\text{V}$

$u_2 = 50\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t)\text{V}$

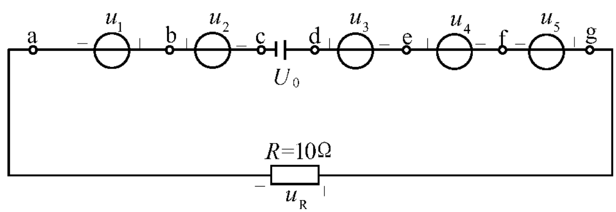
$u_3 = [30\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 20\sqrt{2}\cos(3\omega_1 t)]\text{V}$

$u_4 = [80\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) + 10\sqrt{2}\cos(5\omega_1 t)]\text{V}$

$u_5 = 10\sqrt{2}\sin(\omega_1 t)\text{V}$

(1) 试求 U_{ab}、U_{ac}、U_{ad}、U_{ae}、U_{af}；

(2) 如将 U_0 换为电流源 $i_S = 2\sqrt{2}\cos(7\omega_1 t)$，试求电压 U_{ac}、U_{ad}、U_{ae}、U_{ag}（U_{ab} 等为对应电压的有效值）。



题 12－7 图

解　本题各电压含有的各次谐波分量为：恒定分量和 4 个奇次（ω_1，$3\omega_1$，$5\omega_1$ 和 $7\omega_1$）谐波分量，各电压的有效值计算如下：

(1) $U_{ab} = \sqrt{100^2 + 20^2} = 101.98\text{V}$

$U_{ac} = \sqrt{100^2 + 50^2 + 20^2} = 113.578\text{V}$

$U_{ad} = \sqrt{60^2 + 100^2 + 50^2 + 20^2} = 128.45\text{V}$

$U_{ae} = \sqrt{60^2 + (100+30)^2 + (50-20)^2 + 20^2} = 147.648\text{V}$

$U_{af} = \sqrt{60^2 + (100+30-80)^2 + (50-20)^2 + (20-10)^2} = 84.261\text{V}$

(2) 设电压 U_R 参考方向如图中所示，当将 U_0 换为电流源 i_S（其方向设为从 c 点指向 d 点）时，有

$$U_R = Ri_S = 20\sqrt{2}\cos(7\omega_1 t)\text{V}$$

各电压有效值分别为

$U_{ac} = \sqrt{100^2 + 50^2 + 20^2} = 113.578\text{V}$

$U_{ad} = \sqrt{[(80-30)^2 + 10^2] + 20^2 + 10^2 + 20^2} = 59.16\text{V}$

$U_{ae} = \sqrt{(80^2 + 10^2) + 10^2 + 20^2} = 83.666\text{V}$

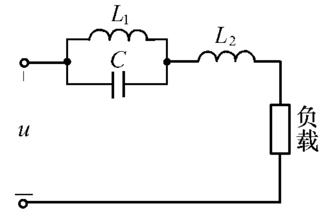
$U_{ag} = u_R = 20\text{V}$

○ 12－8　题 12－8 图所示为滤波电路，要求负载中不含基波分量，但 $4\omega_1$ 的谐波分量

能全部传送至负载。如 $\omega_1 = 1000\text{rad/s}$，$C = 1\mu\text{F}$，求 L_1 和 L_2。

解 欲使负载中不含基波分量，即在此时负载中的电流的基波分量为零，则有 L_1 和 C 在 ω_1 处发生并联谐振，由谐振条件得

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} = 1000\text{rad/s}$$



题 12－8 图

故

$$L_1 = \frac{1}{\omega_1{}^2 C} = \frac{1}{1000^2 \times 10^{-6}} = 1\text{H}$$

若要求 4 次（$4\omega_1$）谐振分量能全部传送至负载端，需使此电路在 $4\omega_1$ 处发生串联谐振，因

$$X_{L2} = 4\omega_1 L_2 = 4000L_2$$

而 L_1 与 C 并联的阻抗为

$$X_{L_1C} = \frac{1}{4\omega_1 C - \dfrac{1}{4\omega_1 L_1}} = \frac{4\omega_1 L_1}{16\omega_1^2 CL_1 - 1} = \frac{800}{3}\Omega$$

串联谐振时，有

$$\text{j}(X_{L_2} - X_{L_1C}) = \text{j}(4000L_2 - \frac{800}{3})\Omega = 0$$

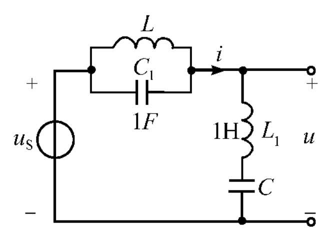
即

$$4000L_2 = \frac{800}{3}$$

$$L_2 = \frac{800}{3} \times \frac{1}{4000} = \frac{1}{15} = 66.67\text{mH}$$

◎ 12－9 题 12－9 图所示电路中，$u_S(t)$ 为非正弦周期电压，其中含有 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 的谐波分量。如果要求在输出电压 $u(t)$ 中不含这两个谐波分量，问 L，C 应为多少？

分析 不含 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 谐振分量表示电路在 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 处发生谐振，根据串联谐振，并联谐振条件求解即可。



题 12－9 图

解 根据题 12－9 图所示电路结构知，欲使输出电压 $u(t)$ 中不含 $3\omega_1$ 和 $7\omega_1$ 的谐波分量，就要求该电路在这两个频率时，输出电压 $u(t)$ 中的 3 次谐波分量和 7 次谐波分量分别为零。

若在 $3\omega_1$ 处 $1H$ 电感与电容 C 发生串联谐振，输出电压的三次谐波 $U_3 = 0$，由谐振条件，得

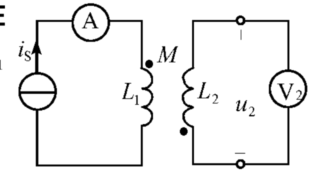
$$3\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C}},\qquad C=\frac{1}{9\omega_1^2L_1}=\frac{1}{9\omega_1^2}$$

若在 $7\omega_1$ 处 $1F$ 电容与电感 L 发生并联谐振，则电路中 7 次谐波的电流 $I_7=0$，电压 $U_7=0$，由谐振条件，得

$$7\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC_1}},\quad L=\frac{1}{49\omega_1^2C_1}=\frac{1}{49\omega_1^2}$$

将上述两个频率处发生谐振的次序调换一下，即在 $3\omega_1$ 处，使 L 与 C_1 发生并联谐振，而在 $7\omega_1$ 处，使 L_1 与 C 发生串联谐振，则得

$$L=\frac{1}{9\omega_1^2},\qquad C=\frac{1}{49\omega_1^2}$$



题 12－10 图

○ 12－10　题 12－10 图所示电路中，$i_S=[5+10\cos(10t-20°)-5\sin(30t+60°)]$A，$L_1=L_2=2$H，$M=0.5$H。求图中交流电表的读数和 u_2。

解　由题 12－10 图所示电路可知，电流表读数为电流 i_S 的有效值，即

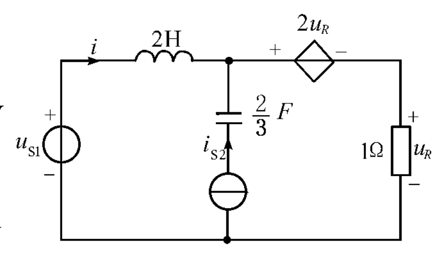
$$A=\sqrt{5^2+\frac{10^2}{2}+\frac{5^2}{2}}=9.354\text{A}$$

而电压 $u_2(t)$ 为

$$\begin{aligned}u_2(t)&=-M\frac{\mathrm{d}i_S}{\mathrm{d}t}\\&=[50\sin(10t-20°)+75\cos(30t+60°)]\text{V}\end{aligned}$$

电压表读数为电压 u_2 的有效值为

$$V_2=\sqrt{\frac{50^2}{2}+\frac{75^2}{2}}=63.738\text{V}$$



题 12－11 图

●12－11　题 12－11 图所示电路中

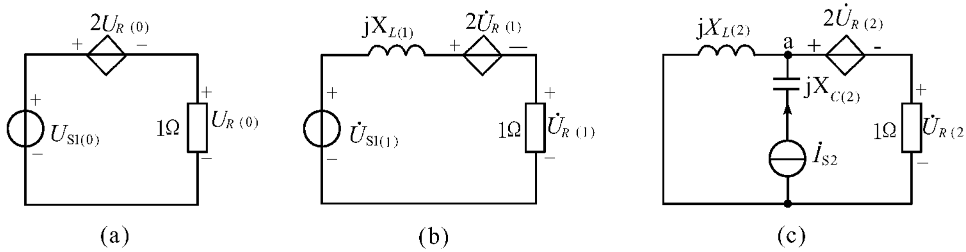
$$u_{S1}=[1.5+5\sqrt{2}\sin(2t+90°)]\text{V}$$

电流源电流 $i_{S2}=2\sin(1.5t)$A。求 u_R 及 u_{S1} 发出的功率。

分析　运用叠加定理，先求直流，再求交流即可求解各响应，然后再根据功率公式求解即可。

解　电路各响应的求解，可以看作是电压源 u_{S1} 的各频率分量和电流源 i_{S2} 单独作用时，所得各响应分量的叠加，具体计算如下：

(1) 直流 $U_{S1(0)}=1.5$V 单独作用时，电感短路，电容开路，电路如题解 12－11 图(a) 所示，根据 KVL 有



题解 12－11 图

$$U_{S1(0)}=2U_{R(0)}+U_{R(0)}=3U_{R(0)}$$

故
$$U_{R(0)}=\frac{1}{3}U_{S1(0)}=0.5\text{V}$$

$$I_{(0)}=U_{R(0)}=0.5\text{A}$$

$$P_{S1(0)}=U_{S1(0)}I_{(0)}=1.5\times0.5=0.75\text{W}$$

(2)$u_{S1(1)}=5\sqrt{2}\sin(2t+90^\circ)\text{A}(\omega_1=2\text{rad/s})$ 的电压分量单独作用时，电路如题解 12－11 图(b) 所示，令

$$\dot{U}_{S1(1)}=5\angle 0^\circ\ \text{V},jX_{L(1)}=j\omega_1 L=j4\Omega$$

根据 KVL，有

$$\dot{U}_{S1(1)}=jX_{L(1)}\dot{I}_{(1)}+2\dot{U}_{R(1)}+\dot{U}_{R(1)}=j4\dot{I}_{(1)}+3\dot{U}_{R(1)}$$

且
$$\dot{U}_{R(1)}=\dot{I}_{(1)}$$

解之，得

$$\dot{U}_{R(1)}=\frac{\dot{U}_{S1(1)}}{3+j4}=\frac{5\angle 0^\circ}{5\angle 53.13^\circ}=1\angle -53.13^\circ\ \text{V}$$

$$\dot{I}_{(1)}=\dot{U}_{R(1)}=1\angle -53.13^\circ\ \text{A}$$

$$P_{S1(1)}=U_{S1(1)}I_{(1)}\cos 53.13^\circ=5\times1\times0.6=3\text{W}$$

(3) 电流源

$$i_{S2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ=\sqrt{2}\angle -90^\circ\ \text{A}$$

$$jX_{L(2)}=j\omega_2 L=j3\Omega$$

$$jX_{C(2)}=-j\frac{1}{\omega_2 C}=-j1\Omega$$

对独立结点 a，列出结点电压方程

$$\left(\frac{1}{jX_{L(2)}}+1\right)\dot{U}_{a(2)}=\dot{I}_{S2}+2\dot{U}_{R(2)}/1$$

$$\dot{U}_{a(2)}=3\dot{U}_{R(2)}$$

代入参数值并消去 $\dot{U}_{a(2)}$，有

$$\left(-j\frac{1}{3}+1\right)\times 2\dot{U}_{R(2)}=\dot{I}_{S2}+2\dot{U}_{R(2)}$$

$$\dot{U}_{R(2)}=\frac{\dot{I}_{S2}}{1-j1}=\frac{\sqrt{2}\angle -90^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ}=1\angle -45^\circ\ \text{V}$$

所以，电压 u_R 为

$$u_R(t)=0.5+\sqrt{2}\cos(2t-53.13^\circ)+\sqrt{2}\cos(1.5t-45^\circ)\text{V}$$

电压源 u_{S1} 发出的功率为

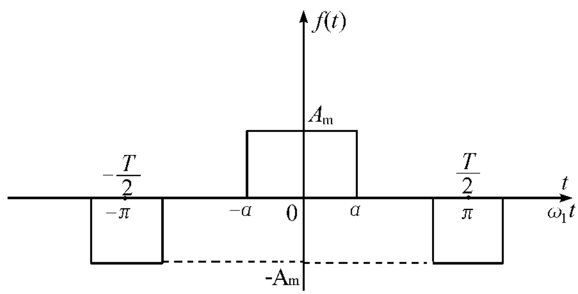
$$P_{S1}=P_{S1(0)}+P_{S1(1)}=0.75+3=3.75\text{W}$$

小结　求解功率既可用有效值直接求解，也可用直流功率与交流功率的和来求解。

○12－12　略

○12－13　略

○ 12－14　求题 12－14 图所示波形的傅里叶级数的指数形式的系数。



题 12－14 图

解　图示波形 $f(t)$ 在一个周期($\omega_1 T=2\pi$) 的表达式为

$$f(t)=\begin{cases}-A_m & -\dfrac{T}{2}\leqslant t<-\dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\\ 0 & -\dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\leqslant t<-\dfrac{\alpha}{\omega_1}\\ A_m & -\dfrac{\alpha}{\omega_1}\leqslant t<\dfrac{\alpha}{\omega_1}\\ 0 & \dfrac{\alpha}{\omega_1}\leqslant t<\dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\\ -A_m & \dfrac{\pi-\alpha}{\omega_1}\leqslant t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

$f(t)$ 展开为傅里叶级数的指数形式为

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega_1 t}$$

由于 $f(t)$ 为偶函数，且具有镜对称性质，所以，有 $C_0 = 0$ 和 $C_{2k} = 0$。

而

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}(-A_\mathrm{m})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\alpha}{\omega_1}}^{\frac{\alpha}{\omega_1}} A_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi-\alpha}{\omega_1}}^{\frac{T}{2}}(-A_\mathrm{m})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{2A_\mathrm{m}}{k\pi}\sin k\alpha \qquad (k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots)$$

第十三章

拉普拉斯变换

学习要求

1. 深刻理解拉普拉斯变换的定义式与基本性质；能根据定义式与基本性质，求一些常用时间函数的拉普拉斯变换。
2. 会用部分分式法求一些象函数的拉普拉斯反变换。
3. 深刻理解和掌握 KCL，KVL 的 s 域形式及电路元件的 s 域伏安关系；能根据时域电路模型正确地画出相应的 s 域电路模型（即运算电路）。
4. 能用运算法求解线性电路中的响应，包括零输入响应、零状态响应、全响应、单位冲激响应 $h(t)$。

知识网络图

拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换
- 部分分式展开
- 运算电路
- 应用拉普拉斯变换分析线性电路

课后习题全解

◯ 13－1　**求下列各函数的象函数：**

(1) $f(t)=1-\mathrm{e}^{-at}$；　(2) $f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$；　(3) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}(1-at)$；

(4) $f(t)=\dfrac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-at})$；　(5) $f(t)=t^2$；　(6) $f(t)=t+2+3\delta(t)$；

(7) $f(t)=t\cos(at)$；　(8) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}+at-1$。

解　(1) $F(s)=\mathscr{L}[1-\mathrm{e}^{-at}]=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}=\dfrac{a}{s(s+a)}$

(2) $F(s)=\mathscr{L}[\sin(\omega t+\varphi)]=\mathscr{L}[\sin\omega t\cos\varphi+\cos\omega t\sin\varphi]$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\varphi+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\varphi=\frac{\omega\cos\varphi+s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

(3) $F(s)=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}(1-at)]=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}-at\mathrm{e}^{-at}]=\dfrac{1}{s+a}-\dfrac{a}{(s+a)^2}=\dfrac{s}{(s+a)^2}$

(4) $F(s)=\mathscr{L}[\dfrac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-at})]=\mathscr{L}[\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}]=\dfrac{1}{as}-\dfrac{1}{a(s+a)}=\dfrac{1}{s(s+a)}$

(5) $F(s)=\mathscr{L}[t^2]=\mathscr{L}[2\cdot\dfrac{1}{2}t^2]=2\cdot\dfrac{1}{s^3}=\dfrac{2}{s^3}$

(6) $F(s)=\mathscr{L}[t+2+3\delta(t)]=\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s}+3=\dfrac{3s^2+2s+1}{s^2}$

(7) $F(s)=\mathscr{L}[t\cos(at)]=\mathscr{L}[\dfrac{1}{2}t(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}at}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}at})]=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{(s+\mathrm{j}a)^2}+\dfrac{1}{(s-\mathrm{j}a)^2}]$

$$=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

(8) $F(s)=\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}+at-1]=\dfrac{1}{s+a}+\dfrac{a}{s^2}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{a^2}{s^2(s+a)}$

◎ 13－2　**求下列各函数的原函数：**

(1) $\dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$；　(2) $\dfrac{2s^2+16}{(s^2+5s+6)(s+12)}$；

(3) $\dfrac{2s^2+9s+9}{s^2+3s+2}$；　(4) $\dfrac{s^3}{(s^2+3s+2)s}$。

分析　**利用部分分式展开法求解即可。**

解　**拉普拉斯反变换利用部分分式展开法。**

(1) $F(s)=\dfrac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}=\dfrac{k_1}{s}+\dfrac{k_2}{s+2}+\dfrac{k_3}{s+4}$

则待定系数为

$$k_1=[sF(s)]_{s=0}=\frac{3}{8},\quad k_2=[(s+2)F(s)]_{s=-2}=\frac{1}{4}$$

$$k_3=[(s+4)F(s)]_{s=-4}=\frac{3}{8}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{8}(3+2e^{-2t}+3e^{-4t})$$

$$(2)F(s)=\frac{2s^2+16}{(s+2)(s+3)(s+12)}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}+\frac{k_3}{s+12}$$

确定待定系数

$$k_1=[(s+2)F(s)]_{s=-2}=\frac{12}{5},\quad k_2=[(s+3)F(s)]_{s=-3}=-\frac{34}{9}$$

$$k_3=[(s+12)F(s)]_{s=-12}=\frac{152}{45}$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{12}{5}e^{-2t}-\frac{34}{9}e^{-3t}+\frac{152}{45}e^{-12t}$$

$$(3)F(s)=\frac{2s^2+9s+9}{s^2+3s+2}=2+\frac{3s+5}{s^2+3s+2}$$

令 $$F_1(s)=\frac{3s+5}{s^2+3s+2}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

其中 $k_1=[(s+1)F_1(s)]_{s=-1}=2,\quad k_2=[(s+2)F_1(s)]_{s=-2}=1$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=2e^{-t}+e^{-2t}$$

所以 $$f(t)=2\delta(t)+2e^{-t}+e^{-2t}$$

$$(4)F(s)=\frac{s^3}{(s^2+3s+2)s}=\frac{s^2}{s^2+3s+2}=1-\frac{3s+2}{s^2+3s+2}$$

令 $$F_1(s)=\frac{3s+2}{s^2+3s+2}=\frac{3s+2}{(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}$$

其中 $k_1=[(s+1)F_1(s)]_{s=-1}=-1,\quad k_2=[(s+2)F_1(s)]_{s=-2}=4$

$$f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=-e^{-t}+4e^{-2t}$$

所以 $$f(t)=\delta(t)-f_1(t)=\delta(t)+e^{-t}-4e^{-2t}$$

○13－3　**求下列各函数的原函数：**

(1) $\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$；　(2) $\frac{s+1}{s^3+2s^2+2s}$；　(3) $\frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$；

(4) $\frac{s}{(s^2+1)^2}$。

解　$(1)D(s)=(s+1)(s+2)^2$

令 $D(s)=0$ **具有重根，所以，设** $F(s)$ **为**

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_{21}}{s+2}+\frac{k_{22}}{(s+2)^2}$$

其中
$$k_1 = [(s+1)F(s)]_{s=-1} = 1$$
$$k_{22} = [(s+2)^2F(s)]_{s=-2} = [\frac{1}{s+1}]_{s=-2} = -1$$
$$k_{21} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)]_{s=-2} = -1$$
所以
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-2t}$$
$$(2)F(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+2s} = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{s+1}{s[s-(-1+\mathrm{j})][s-(-1-\mathrm{j})]}$$
$$= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1-\mathrm{j}} + \frac{k_3}{s+1+\mathrm{j}}$$
即 $D(s)=0$ 具有共轭复根

各系数为
$$k_1 = [sF(s)]_{s=0} = \left.\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right|_{s=0} = 0.5$$
$$k_2 = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=-1+\mathrm{j}} = \left.\frac{s+1}{3s^2+4s+2}\right|_{s=-1+\mathrm{j}}$$
$$= \frac{1}{2}(-1-\mathrm{j}) = 0.3536\mathrm{e}^{-\mathrm{j}135^\circ}$$
$$k_3 = |k_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2} = 0.3536\mathrm{e}^{\mathrm{j}135^\circ}$$
所以
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = 0.5\varepsilon(t) + 2|k_2|\mathrm{e}^{at}\cos(\omega t+\theta_2)$$
$$= 0.5\varepsilon(t) + 0.707\mathrm{e}^{-t}\cos(t-135^\circ)$$
$$(3)F(s) = \frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$$
令 $D(s)=s(s^2+4s+5)=0$，有 $p_1=0$ 为单根，$p_2=-2+\mathrm{j}$，$p_3=-2-\mathrm{j}$ 为共轭复根。

即令
$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2-\mathrm{j}} + \frac{k_3}{s+2+\mathrm{j}}$$
各系数为
$$k_1 = [sF(s)]_{s=0} = \left.\frac{s^2+6s+5}{s^2+4s+5}\right|_{s=0} = 1$$
$$k_2 = \left.\frac{N(s)}{D'(s)}\right|_{s=P_2} = \left.\frac{s^2+6s+5}{3s^2+8s+5}\right|_{s=-2+\mathrm{j}} = -\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$
$$k_3 = |k_2|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$
所以
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \varepsilon(t) + 2\mathrm{e}^{-2t}\sin t$$
$$(4)F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{(s+\mathrm{j})^2(s-\mathrm{j})^2}$$
令
$$D(s) = (s^2+1)^2 = (s+\mathrm{j})^2(s-\mathrm{j})^2 = 0$$
有 $p_1=-\mathrm{j}$ 和 $p_2=\mathrm{j}$ 分别有二重根，且 p_1、p_2 为共轭复根。

令 $$F(s)=\frac{k_{11}}{(s+\mathrm{j})^2}+\frac{k_{12}}{s+\mathrm{j}}+\frac{k_{22}}{(s-\mathrm{j})^2}+\frac{k_{21}}{(s-\mathrm{j})}$$

则各系数为

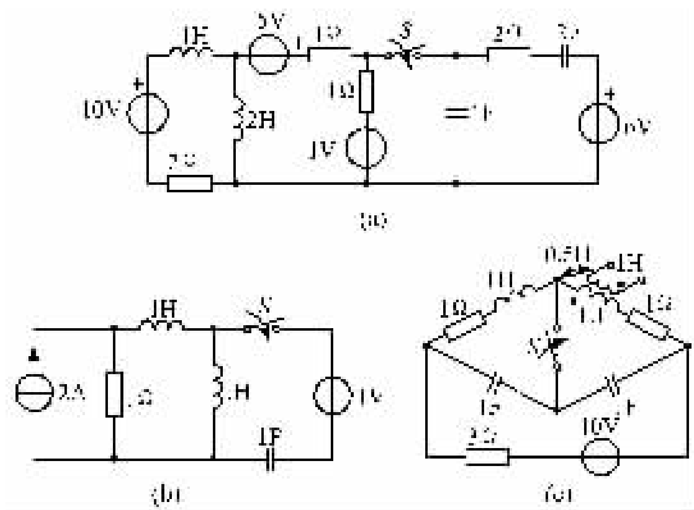
$$k_{11}=[(s+\mathrm{j})^2F(s)]_{s=P_1}=\frac{s}{(s-\mathrm{j})^2}\bigg|_{s=-\mathrm{j}}=\mathrm{j}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$k_{22}=|k_{11}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_1}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}},k_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+\mathrm{j})^2F(s)]_{s=-\mathrm{j}}=0,k_{21}=$$

0

所以有 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{j}\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\mathrm{j}\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=\frac{1}{2}t\sin t$$

◎ 13－4　题 13－4 图所示电路原已达稳态，$t=0$ 时把开关 S 合上，分别画出运算电路。



题 13－4 图

分析　电路处于稳定状态时，电感相当于短路，电容相当于开路，将各个元件视为运算电路中的元件即可得运算电路。

解　(a) 开关闭合前电路处于稳态，故电感视为短路，电容视为开路，电路如题解 13－4 图(a1) 所示。

$$i_{L1}(0_-)=\frac{10}{2}=5\mathrm{A}$$

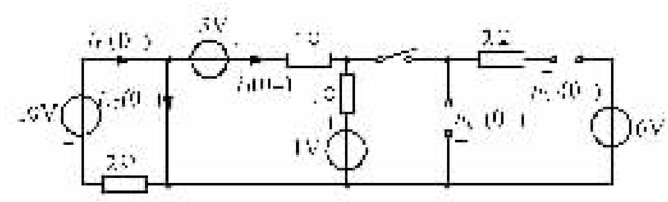
$$i_{L2}(0_-)=i_L(0_-)-i_3(0_-)=5-\frac{5-1}{1+1}=3\mathrm{A}$$

$$u_{C1}(0_-)=\frac{2}{1+2}\times 6=4\mathrm{V}$$

$$u_{C2}(0_-)=6-4=2\mathrm{V}$$

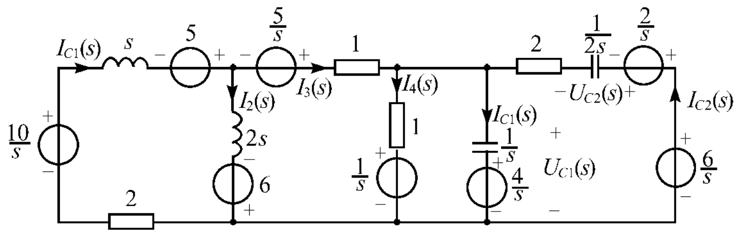
从而 $L_1 i_{L1}(0_-) = 5\text{V}, \quad L_2 i_{L2}(0_-) = 6\text{V}$

$$\frac{u_{C1}(0_-)}{s} = \frac{4}{s}, \quad \frac{u_{C2}(0_-)}{s} = \frac{2}{s}$$



题解 13－4 图(a1)

开关闭合后相应的运算电路如题解 13－4 图(a2)所示。



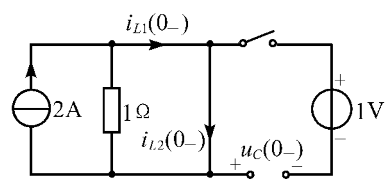
题解 13－4 图(a2)

(b) 开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，电容视为开路，如题解 13－4 图(b1)所示。

$$i_{L1}(0_-) = i_{L2}(0_-) = 2\text{A}$$

$$u_C(0_-) = 0$$

从而 $L_1 i_{L1}(0_-) = L_2 i_{L2}(0_-) = 2\text{V}$



题解 13－4 图(b1)

开关闭合后题 13－4 图(b)对应的运算电路如题解 13－4 图(b2)所示。

(c) 开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，电容视为开路，如题解 13－4 图(c1)所示。

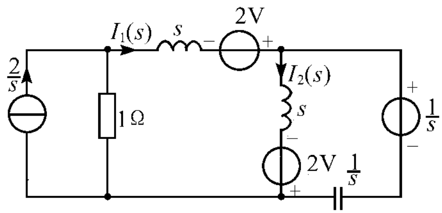
$$i_{L1}(0_-) = i_{L2}(0_-) = \frac{10}{3+1+1} = 2\text{A}$$

$$u_{C1}(0_-) = u_{C2}(0_-) = \frac{1}{2} \times 2 \times (1+1) = 2\text{V}$$

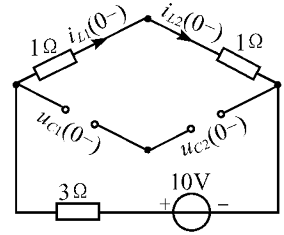
从而 $L_1 i_{L1}(0_-) = 2, \quad L_2 i_{L2}(0_-) = 2$

$$M i_{L2}(0_-) = 1, \quad \frac{u_{C1}(0_-)}{s} = \frac{u_{C2}(0_-)}{s} = \frac{2}{s}$$

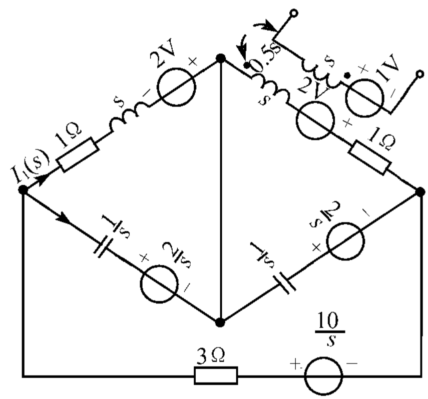
开关闭合后题 13－4 图(c)对应的运算电路题解 13－4 图(c2)所示。



题解 13－4 图(b2)

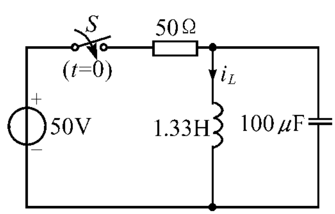


题解 13－4 图(c1)

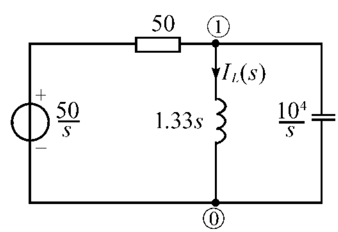


题解 13－4 图(c2)

◎ 13－5　题 13－5 图所示电路原处于零状态，$t=0$ 时合上开关 S，试求电流 i_L。



题 13－5 图



题解 13－5 图

分析　画出运算电路求解 $I_L(s)$，再进行拉氏反变换即可。

解　由于开关闭合前电路已处于零状态，即 $i_L(0_-)=0, u_C(0_-)=0$，开关闭合后电路对应的运算电路图如题解 13－5 图所示。

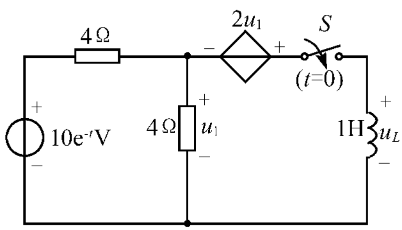
列结点电压方程　$\left(\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{1.33s}+\dfrac{s}{10^4}\right)U_{n1}(s)=\dfrac{50}{s}/50$

则
$$U_{n1}(s)=\frac{1}{(\frac{1}{50}+\frac{1}{1.33s}+\frac{s}{10^4})s}$$

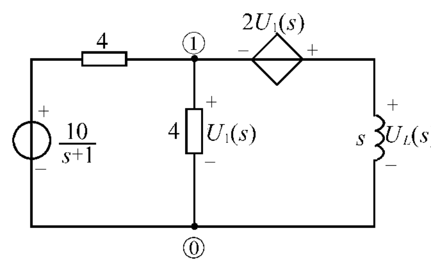
$$I_L(s)=\frac{U_{n1}(s)}{1.33s}=\frac{1}{s(0.0266s+1+1.33\times10^{-4}s^2)}$$
$$=\frac{7500}{s(s^2+200s+7500)}=\frac{7500}{s(s+50)(s+150)}=\frac{1}{s}-\frac{1.5}{s+50}+\frac{0.5}{s+150}$$

所以 $$i_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_L(s)]=(1-1.5\mathrm{e}^{-50t}+0.5\mathrm{e}^{-150t})\mathrm{A}$$

◯ 13－6 **电路如题 13－6 图所示，已知 $i_L(0_-)=0\mathrm{A}$，$t=0$ 时将开关 S 闭合，求 $t>0$ 时的 $u_L(t)$。**



题 13－6 图



题解 13－6 图

解 开关闭合后电路对应的运算电路如题解 13－6 图所示。

列结点电压方程 $$(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{s})U_{n1}(s)=\frac{\frac{10}{s+1}}{4}-\frac{2U_1(s)}{s}$$

补充方程 $$U_1(s)=U_{n1}(s)$$

整理，得 $$(\frac{1}{2}+\frac{3}{s})U_{n1}(s)=\frac{5}{2(s+1)}$$

求得 $$U_{n1}(s)=\frac{5s}{(s+1)(s+6)}$$

由 KVL 方程，得 $$U_L(s)=3U_{n1}(s)=\frac{15s}{(s+1)(s+6)}=\frac{-3}{s+1}+\frac{18}{s+6}$$

所以 $$u_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_L(s)]=(-3\mathrm{e}^{-t}+18\mathrm{e}^{-6t})\mathrm{V}$$

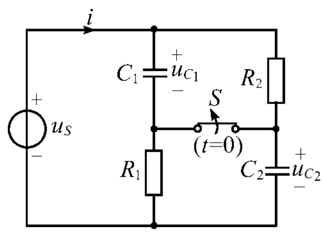
◯13－7 **题 13－7 图所示电路中 $u_S(t)$ 为直流电压源，开关原闭合，已达稳态。$t=0$ 时开关断开，求开关断开后总电流 i 和电容上电压 u_{C_1} 和 u_{C_2}。已知 $u_S(t)=30\mathrm{V}$，$C_1=0.2\mu F$，$C_2=\frac{1}{2}C_1$，$R_1=100\Omega$，$R_2=2R_1$。**

解　开关断开前,电路处于稳态,电容视为开路,如题解 13－7 图(a) 所示。

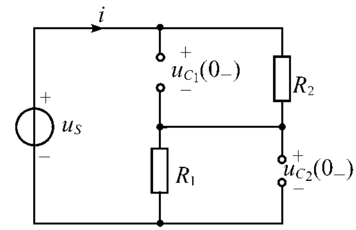
$$u_{C1}(0_-)=\frac{u_S}{R_1+R_2}\cdot R_2=\frac{2}{3}\times 30=20\text{V}$$

$$u_{C2}(0_-)=u_S-u_{C1}(0_-)=10\text{V}$$

开关断开后电路的运算电路如题解 13－7 图(b) 所示。



题 13－7 图



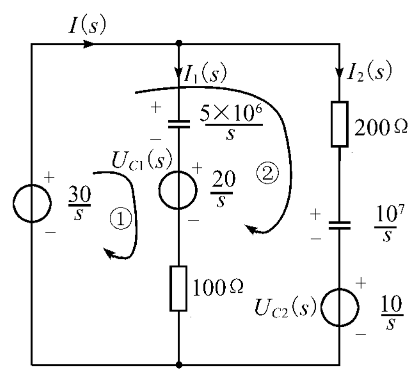
题解 13－7 图(a)

列回路电流方程(回路 ① 的电流为 $I_1(s)$,回路 ② 的电流为 $I_2(s)$)。

$$\begin{cases}(100+\dfrac{5\times 10^6}{s})I_1(s)=\dfrac{30}{s}-\dfrac{20}{s}\\[2mm](200+\dfrac{10^7}{s})I_2(s)=\dfrac{30}{s}-\dfrac{10}{s}\end{cases}$$

求得

$$\begin{cases}I_1(s)=\dfrac{0.1}{s+5\times 10^4}\\[2mm]I_2(s)=\dfrac{0.1}{s+5\times 10^4}\end{cases}$$



题解 13－7 图(b)

由 KCL,得

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)=\frac{0.2}{s+5\times 10^4}$$

电容上电压为

$$U_{C1}(s)=\frac{5\times 10^6}{s}I_1(s)+\frac{20}{s}$$

$$=\frac{30}{s}-\frac{10}{s+5\times 10^4}$$

$$U_{C2}(s)=\frac{10^7}{s}I_2(s)+\frac{10}{s}=\frac{30}{s}-\frac{20}{s+5\times 10^4}$$

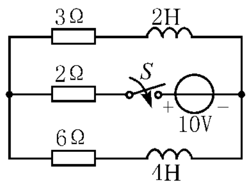
所以有　$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=0.2e^{-5\times 10^4 t}\varepsilon(t)\text{A}$

$$u_{C1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C1}(s)]=(30-10e^{-5\times 10^4 t})\varepsilon(t)\text{V}$$

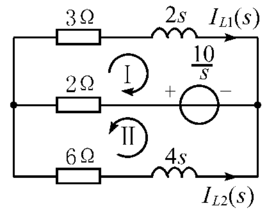
$$u_{C2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C2}(s)]=(30-20e^{-5\times 10^4 t})\varepsilon(t)\text{V}$$

○ 13－8　题 13－8 图所示电路中的电感原无磁场能量,$t=0$ 时,合上开关 S,用运算法求电感中的电流。

解 根据题意知，$i_{L1}(0_-)=0$，$i_{L2}(0_-)=0$，开关闭合后电路的运算电路如题解 13－8 图所示。



题 13－8 图



题解 13－8 图

列回路电流方程

$$\begin{cases}(5+2s)I_{L1}(s)+2I_{L2}(s)=\dfrac{10}{s}\\[2ex] 2I_{L1}(s)+(8+4s)I_{L2}(s)=\dfrac{10}{s}\end{cases}$$

解上式方程，得

$$I_{L1}(s)=\frac{5}{s(s+3)}=\frac{\frac{5}{3}}{s}-\frac{\frac{5}{3}}{s+3}$$

$$I_{L2}(s)=\frac{\frac{5}{2}}{s(s+3)}=\frac{\frac{5}{6}}{s}-\frac{\frac{5}{6}}{s+3}$$

所以

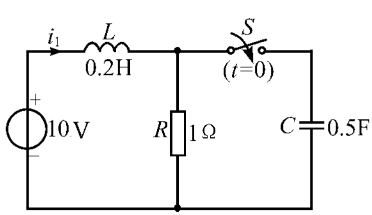
$$i_{L1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_{L1}(s)]=\frac{5}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

$$i_{L2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_{L2}(s)]=\frac{5}{6}(1-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

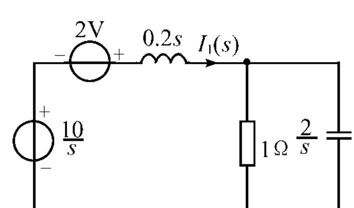
○ 13－9 题 13－9 图所示电路中开关 S 闭合前电路已处于稳定状态，电容初始储能为零，在 $t=0$ 时闭合开关 S，求 $t>0$ 时电流 $i_1(t)$。

解 开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，求得 $i_L(0_-)=\dfrac{10}{1}=10\mathrm{A}$。

由已知条件知，$u_C(0_-)=0$，开关闭合后电路所对应的运算电路如题解 13－9 图所示。



题 13－9 图



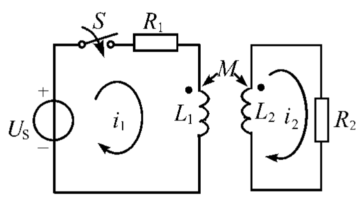
题解 13－9 图

$$I_1(s)=\frac{2+\frac{10}{s}}{0.2s+(1\,/\!/\,\frac{2}{s})}=\frac{10(s^2+7s+10)}{s(s^2+2s+10)}$$

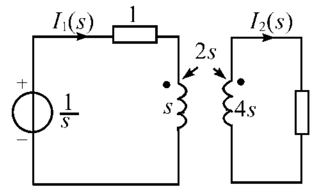
$$=\frac{10}{s}+\frac{\frac{25}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{s-(-1+j3)}+\frac{\frac{25}{3}e^{j\frac{\pi}{2}}}{s-(-1-j3)}$$

所以 $$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=(10+\frac{50}{3}e^{-t}\sin 3t)\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

◎ 13－10　**题 13－10 图所示电路中** $L_1=1\mathrm{H}$，$L_2=4\mathrm{H}$，$M=2\mathrm{H}$，$R_1=R_2=1\Omega$，$U_S=1\mathrm{V}$，**电感中原无磁场能量**。$t=0$ **时合上开关** S，**用运算法求** i_1、i_2。



题 13－10 图



题解 13－10 图

分析　**画出运算电路，列出 KVL 方程求解即可。**

解　**由题意知：**$i_{L1}(0_-)=0$，$i_{L2}(0_-)=0$，**则该电路的运算电路如题解** 13－10 **图所示。**

列 KVL 方程
$$\begin{cases}(1+s)I_1(s)-2sI_2(s)=\dfrac{1}{s}\\ -2sI_1(s)+(1+4s)I_2(s)=0\end{cases}$$

解方程，得
$$\begin{cases}I_1(s)=\dfrac{4s+1}{s(5s+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{5(s+\frac{1}{5})}\\ I_2(s)=\dfrac{2}{5s+1}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{s+\frac{1}{5}}\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=(1-\dfrac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t})\varepsilon(t)\mathrm{A}\\ i_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_2(s)]=\dfrac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\varepsilon(t)\mathrm{A}\end{cases}$$

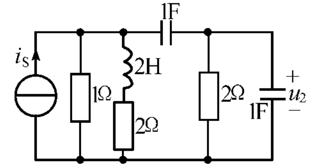
○ 13－11　**题 13－11 图所示电路中** $i_S=2e^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$，**用运算法求** $U_2(s)$。

解　**由于电路处于零状态，故** $u_{C1}(0_-)=0$，$u_{C2}(0_-)=0$，$i_L(0_-)=0$，**又** $I(s)=\mathscr{L}[2e^{-t}\varepsilon(t)]=\dfrac{2}{s+1}$，**所以原电路对应的运算电路如题解** 13－11 **图**(a) **所示。**

用戴维宁定理求，将电路从 $1,1'$ 处断开。

$$U_{oc}(s)=I(s)\cdot\frac{1\times(2+2s)}{1+(2+2s)}=\frac{2+2s}{3+2s}I(s)$$

$$Z_{eq}(s)=\frac{1}{s}+\frac{1\times(2+2s)}{1+(2+2s)}=\frac{1}{s}+\frac{2+2s}{3+2s}$$



题 13－11 图

等效电路如题解 13－11 图(b) 所示。

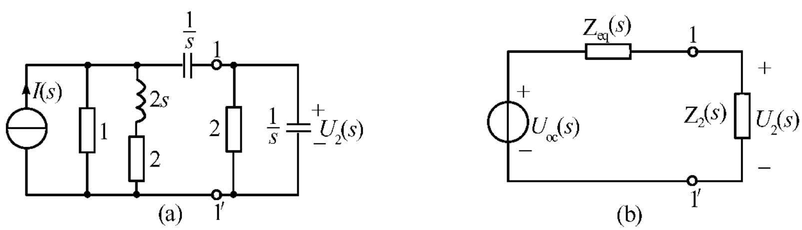
$$U_2(s)=\frac{U_{oc}(s)}{Z_{eq}(s)+Z_2(s)}\cdot Z_2(s)$$

其中

$$Z_2(s)=\frac{2\cdot\dfrac{1}{s}}{2+\dfrac{1}{s}}=\frac{2}{1+2s}$$

所以有

$$U_2(s)=\frac{\dfrac{2+2s}{3+2s}\times\dfrac{2}{s+1}}{\dfrac{1}{s}+\dfrac{2+2s}{3+2s}+\dfrac{2}{1+2s}}\times\frac{2}{1+2s}=\frac{8s}{4s^3+14s^2+16s+3}$$



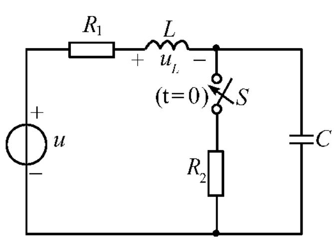
题解 13－11 图

○ 13－12　题 13－12 图所示电路中 $R_1=10\Omega$，$R_2=10\Omega$，$L=0.15\mathrm{H}$，$C=250\mu F$，$u=150\mathrm{V}$，S 闭合前电路已达稳态。用运算法求合上 S 后的电感电压 u_L。

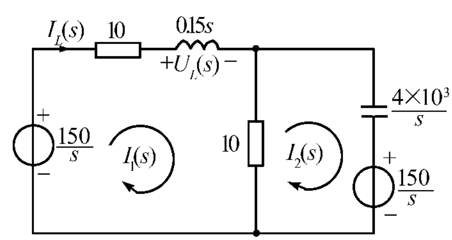
解　开关闭合前电路处于稳态，电感视为短路，电容视为开路，所以有

$$u_C(0_-)=u=150\mathrm{V},\quad i_L(0_-)=0$$

开关闭合后电路对应的运算电路如题解 13－12 所示。



题 13－12 图



题解 13－12 图

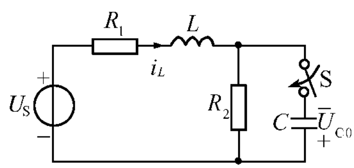
列回路电流方程
$$\begin{cases}(20+0.15s)I_1(s)-10I_2(s)=\dfrac{150}{s}\\[2ex] -10I_1(s)+\left(10+\dfrac{4\times10^3}{s}\right)I_2(s)=-\dfrac{150}{s}\end{cases}$$

解方程，得
$$I_1(s)=\frac{150\times4\times10^3}{s(1.5s^2+700s+8\times10^4)}=I_L(s)$$

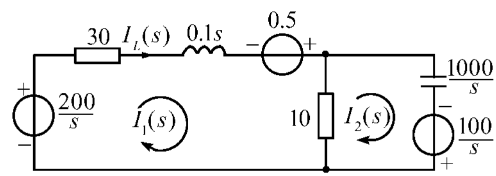
从而有
$$U_L(s)=0.15sI_1(s)=\frac{0.15\times150\times4\times10^3}{1.5s^2+700s+8\times10^4}$$
$$=\frac{0.15\times4\times10^5}{(s+200)\left(s+\dfrac{800}{3}\right)}=\frac{900}{s+200}-\frac{900}{s+\dfrac{800}{3}}$$

所以有
$$u_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_L(s)]=(900\mathrm{e}^{-200t}-900\mathrm{e}^{-\frac{800}{3}t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

○ 13－13　电路如题 13－13 图，设电容上原有电压 $U_{C0}=100\mathrm{V}$，电源电压 $U_S=200\mathrm{V}$，$R_1=30\Omega$，$R_2=10\Omega$，$L=0.1\mathrm{H}$，$C=1000\mu\mathrm{F}$。求 S 合上后电感中的电流 $i_L(t)$。



题 13－13 图



题解 13－13 图

解　开关 S 闭合前电路处于稳态，有
$$i_L(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R_2}=5\mathrm{A},\quad u_C(0_-)=U_{C0}=100\mathrm{V}$$

开关 S 闭合后所对应的运算电路如题解 13－13 图所示。

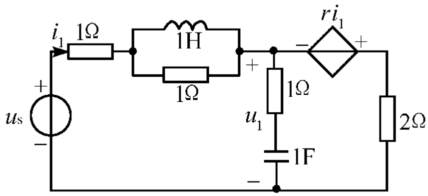
列回路电流方程
$$\begin{cases}(40+0.1s)I_1(s)-10I_2(s)=0.5+\dfrac{200}{s}\\[2ex] -10I_1(s)+\left(10+\dfrac{1000}{s}\right)I_2(s)=\dfrac{100}{s}\end{cases}$$

解方程，得
$$I_1(s)=\frac{0.5s^2+350s+2\times10^4}{s(0.1s^2+40s+4000)}=\frac{5(s^2+700s+40\,000)}{s(s+200)^2}$$
$$=\frac{5}{s}+\frac{1500}{(s+200)^2}=I_L(s)$$

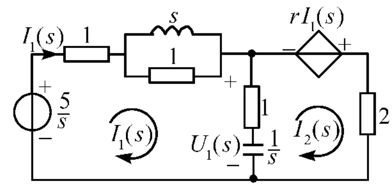
所以
$$i_L(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_L(s)]=(5+1500t\mathrm{e}^{-200t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

○ 13－14　题 13－14 图所示电路中的储能元件均为零初始值，$u_S(t)=5\varepsilon(t)\mathrm{V}$ 在下列条件下求 $U_1(s)$：(1) $r=-3$；(2) $r=3$。

解　题 13－14 图所示电路处于零状态，原电路所对应的运算电路如题解 13－14 图所示。



题 13－14 图



题解 13－14 图

列回路电流方程
$$\begin{cases}(1+\dfrac{s}{1+s}+1+\dfrac{1}{s})I_1(s)-(1+\dfrac{1}{s})I_2(s)=\dfrac{5}{s}\\ -(1+\dfrac{1}{s})I_1(s)+(1+\dfrac{1}{s}+2)I_2(s)=rI_1(s)\end{cases}$$

整理，得
$$\begin{cases}(2+\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{1+s})I_1(s)-(1+\dfrac{1}{s})I_2(s)=\dfrac{5}{s}\\ -(1+r+\dfrac{1}{s})I_1(s)+(3+\dfrac{1}{s})I_2(s)=0\end{cases}$$

解得
$$I_1(s)=\frac{5(1+s)[1+s(1+r)]}{(3s^2+3s+1)[1+s(1+r)]-(1+s)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{s}{1+s(1+r)}I_1(s)$$

$$U_1(s)=[I_1(s)-I_2(s)]\cdot(1+\frac{1}{s})$$

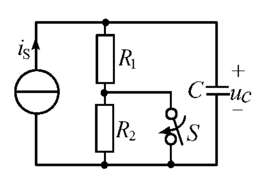
$$=\frac{5(2-r)(s+1)^2}{s[(2-r)(s+1)^2+6s^2+5s+1]}$$

（1）当 $r=-3$ 时，有 $U_1(s)=\dfrac{25(s+1)^2}{s(11s^2+15s+6)}=\dfrac{25}{11}\cdot\dfrac{(s+1)^2}{s(s^2+\frac{15}{11}s+\frac{6}{11})}$

（2）当 $r=3$ 时，有 $U_1(s)=\dfrac{-5(s+1)^2}{s^2(5s+3)}=-\dfrac{(s+1)^2}{s^2(s+\frac{3}{5})}$

○ 13－15　题 13－15 图所示电路中，$i_S=2\sin(1000t)A$，$R_1=R_2=20\Omega$，$C=1000\mu F$，$t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 $u_C(t)$。

解　开关闭合前，电路处于正弦稳态，先求 $u_C(0_-)$。如题解 13－15 图(a) 所示，



题 13－15 图

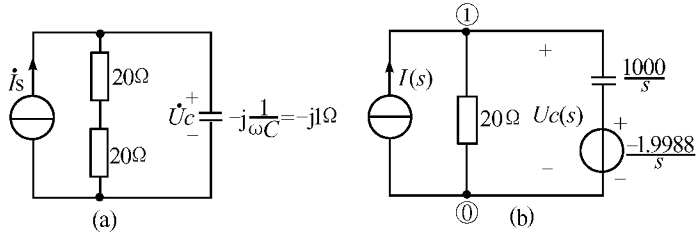
$$\dot{I}_S=\sqrt{2}\angle-90^\circ\ A$$

$$Z_{in}=\frac{(20+20)(-j)}{20+20-j}=\frac{-40j}{40-j}$$

$$=0.9997\angle-88.57^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_C=Z_{in}\dot{I}_S=0.9997\sqrt{2}\angle-178.57^\circ\ V$$

$$U_C(t)=1.9994\cos(1000t-178.57^\circ)V$$



题解 13－15 图

则　$$u_C(0_-)=1.9994\cos(-178.57^\circ)=-1.9988\mathrm{V}$$

开关闭合后相应的运算电路如题解 13－15 图(b) 所示。

其中　$$I_S(s)=\mathscr{L}[2\sin(1000t)]=\frac{2000}{s^2+1000^2}$$

列结点电压方程　$$\left(\frac{1}{20}+\frac{s}{1000}\right)U_{n1}(s)=I_S(s)+\frac{-1.9988}{s}\Big/\frac{1000}{s}$$

所以 $$U_{n1}(s)=\frac{I_1(s)-1.9988\times10^{-3}}{0.05+0.001s}=\frac{\dfrac{2000}{s^2+1000^2}-1.9988\times10^{-3}}{0.05+0.001s}$$

$$=\frac{2\times10^6-1.9988(s^2+1000^2)}{(s+50)(s^2+1000^2)}$$

$$=\frac{-3.788\times10^{-3}}{s+50}+\frac{0.9988\mathrm{e}^{-\mathrm{j}177.138^\circ}}{s-\mathrm{j}1000}+\frac{0.9988\mathrm{e}^{\mathrm{j}177.138^\circ}}{s+\mathrm{j}1000}=U_C(s)$$

从而有 $$u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_C(s)]$$

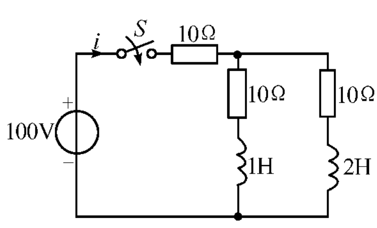
$$=-3.788\times10^{-3}\mathrm{e}^{-50t}+1.9976\cos(1000t-177.138^\circ)\mathrm{V}$$

◎ 13－16　题 13－16 图电路在 $t=0$ 时合上开关 S，用结点法求 $i(t)$。

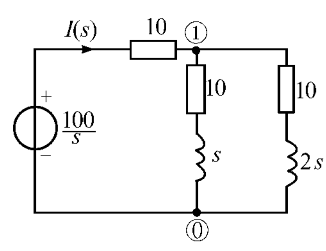
分析　列写结点电压方程求解即可。

解　开关闭合前　$i_{L1}(0_-)=0,\quad i_{L2}(0_-)=0$

开关闭合后对应的运算电路如题解 13－16 图所示。



题 13－16 图



题解 13－16 图

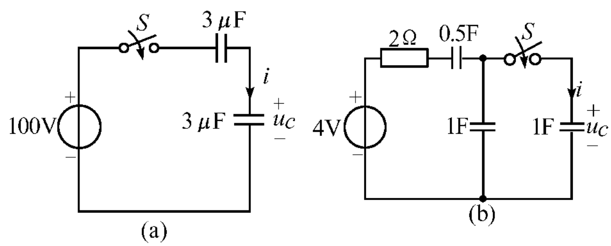
列结点电压方程　$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10+s}+\frac{1}{10+2s}\right)U_{n1}(s)=\frac{\dfrac{100}{s}}{10}$$

解得 $U_{n1}(s)=\dfrac{10}{s(\frac{1}{10}+\frac{1}{10+s}+\frac{1}{10+2s})}=\dfrac{50(s+10)(2s+10)}{s(s^2+30s+150)}$

从而
$$I(s)=\frac{1}{10}\left[\frac{100}{s}-U_{n1}(s)\right]=\frac{10}{s}-\frac{5(s+10)(2s+10)}{s(s^2+30s+150)}$$
$$=\frac{150s+1000}{s(s^2+30s+150)}=\frac{150s+1000}{s(s+6.34)(s+23.66)}$$
$$=\frac{6.667}{s}-\frac{0.446}{s+6.34}-\frac{6.22}{s+23.66}$$

所以 $i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=(6.667-0.446e^{-6.34t}-6.22e^{-23.66t})\varepsilon(t)\mathrm{A}$

○ 13－17　**题 13－17 图所示各电路在 $t=0$ 时合上开关 S，用运算法求 $i(t)$ 及 $u_C(t)$。**



题 13－17 图

解　(a) **开关闭合前** $u_C(0_-)=0$，**开关闭合后的运算电路如题解 13－17 图(a) 所示。**

可见 $U_C(s)=\dfrac{\frac{100}{s}}{2}=\dfrac{50}{s}$

$$I_C(s)=\frac{\frac{100}{s}}{\frac{1}{sC}+\frac{1}{sC}}=50C=50\times3\times10^{-6}=1.5\times10^{-4}$$

从而有 $i_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_C(s)]=1.5\times10^{-4}\delta(t)=0.15\delta(t)\mathrm{mA}$

$u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_C(s)]=50\varepsilon(t)\mathrm{V}$

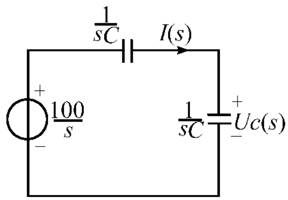
(b) **开关闭合前电路处于稳态**

$$u_{C1}(0_-)=\frac{1}{1+0.5}\times4=\frac{8}{3}\mathrm{V},\quad u_{C2}(0_-)=\frac{0.5}{0.5+1}\times4=\frac{4}{3}\mathrm{V}$$

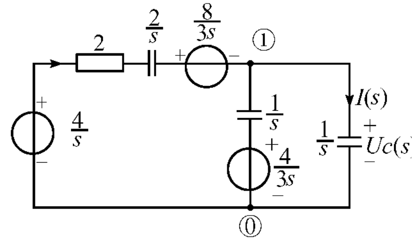
开关闭合后的运算电路如题解 13－17 图(b) 所示。

列结点电压方程$[U_{n1}(s)=U_C(s)]$

$$\left[\frac{1}{2+\frac{2}{s}}+s+s\right]U_C(s)=\frac{\left(\frac{4}{s}-\frac{8}{3s}\right)}{\left(2+\frac{2}{s}\right)}+\frac{\frac{4}{3s}}{\frac{1}{s}}$$



(a)



(b)

题解 13－17 图

解得

$$U_C(s)=\frac{4(2s+3)}{3s(4s+5)}=\frac{4}{5s}-\frac{2}{15(s+\frac{5}{4})}$$

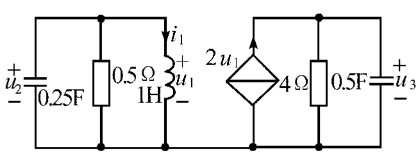
$$I(s)=sU_C(s)=\frac{4(2s+3)}{3(4s+5)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6(s+\frac{5}{4})}$$

从而

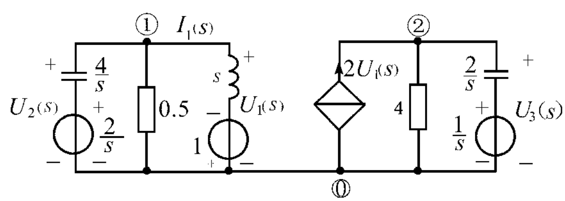
$$u_C(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_C(s)]=\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}e^{-\frac{5}{4}t}\right)\varepsilon(t)\mathrm{V}$$

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=[\frac{2}{3}\delta(t)+\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{4}t}]\varepsilon(t)\mathrm{A}$$

●13－18　**题 13－18 图所示电路中** $i_1(0_-)=1\mathrm{A}$，$u_2(0_-)=2\mathrm{V}$，$u_3(0_-)=1\mathrm{V}$，**试用拉氏变换法求** $t\geqslant 0$ **时的电压** $u_2(t)$ **和** $u_3(t)$。



题 13－18 图



题解 13－18 图

分析　画出电路对应的运算电路，列出结点电压方程求解，再进行拉氏反变换即可。

解　由已知条件知：$i_1(0_-)=1\mathrm{A}$，$u_2(0_-)=2\mathrm{V}$，$u_3(0_-)=1\mathrm{V}$

对应的运算电路如题解 13－18 图所示。

列结点电压方程　$[U_{n1}(s)=U_1(s),\quad U_{n2}(s)=U_3(s)]$

$$\begin{cases}(\frac{s}{4}+\frac{1}{0.5}+\frac{1}{s})U_1(s)=\frac{2}{s}/\frac{4}{s}-\frac{1}{s}\\(\frac{1}{4}+\frac{s}{2})U_3(s)=2U_1(s)+\frac{1}{s}/\frac{2}{s}\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}(s^2+8s+4)U_1(s)=2s-4\\(1+2s)U_3(s)=8U_1(s)+2\end{cases}$$

求得

$$U_1(s)=\frac{2s-4}{s^2+8s+4}=\frac{2.732}{s+7.464}-\frac{0.732}{s+0.536}=U_2(s)$$

$$U_3(s)=\frac{8U_1(s)+2}{1+2s}=\frac{2s^2+32s-24}{(s^2+8s+4)(2s+1)}$$

$$=\frac{-1.57}{s+7.464}+\frac{81.35}{s+0.536}-\frac{79}{s+0.5}$$

从而，有

$$u_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_2(s)]=(2.732e^{-7.464t}-0.732e^{-0.536t})\varepsilon(t)\text{V}$$

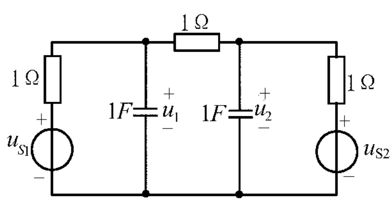
$$u_3(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_3(s)]=(-1.57e^{-7.464t}+81.35e^{-0.536t}-79e^{-0.5t})\varepsilon(t)\text{V}$$

小结　运用拉氏变换求解电路，可以简化求解的复杂性。

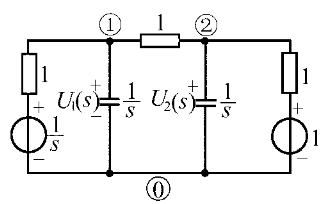
○ 13－19　$u_C(t)=7.212e^{-t}\cos(t+56.31°)\varepsilon(t)\text{V}$

○ 13－20　电路如题 13－20 图所示，已知 $u_{S1}(t)=\varepsilon(t)\text{V}$，$u_{S2}(t)=\delta(t)$，试求 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$。

解　电路对应的运算电路如题解 13－20 图所示。



题 13－20 图



题解 13－20 图

列结点电压方程
$$\begin{cases}(1+1+s)U_1(s)-U_2(s)=\dfrac{1}{s}\\-U_1(s)+(1+s+1)U_2(s)=1\end{cases}$$

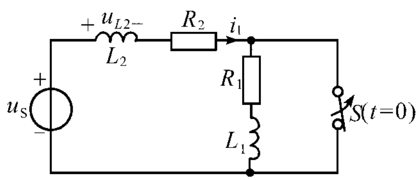
解得
$$\begin{cases}U_1(s)=\dfrac{2}{s(s+3)}=\dfrac{2}{3s}-\dfrac{2}{3(s+3)}\\U_2(s)=\dfrac{s+1}{s(s+3)}=\dfrac{1}{3s}+\dfrac{2}{3(s+3)}\end{cases}$$

从而有
$$u_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_1(s)]=(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}e^{-3t})\varepsilon(t)\text{V}$$

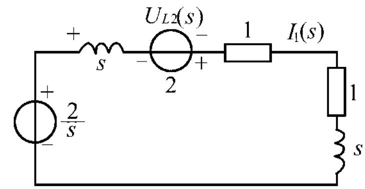
$$u_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_2(s)]=(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t})\varepsilon(t)\text{V}$$

○ 13－21　$i_L(t)=(1-e^{-\frac{1}{6}t})\varepsilon(t)+(1-e^{-\frac{1}{6}(t-1)})\varepsilon(t-1)-2(1-e^{-\frac{1}{6}(t-2)})\varepsilon(t-2)\mathrm{A}$

● 13－22　**电路如题 13－22 图所示，开关 S 原是闭合的，电路处于稳态。若 S 在 $t=0$ 时打开，已知 $U_S=2\mathrm{V}$，$L_1=L_2=1\mathrm{H}$，$R_1=R_2=1\Omega$。试求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_1(t)$ 和 $u_{L_2}(t)$。**



题 13－22 图



题解 13－22 图

分析　S 闭合时，电感被短路，$i_L(0_-)=0$，在 $t\geqslant 0$ 后即 S 断开后，R_1、L_1、R_2、L_2 串联，画出运算电路求解。

解　开关 S 打开前电路处于稳态，所以有 $i_{L2}(0_-)=\dfrac{2}{1}=2\mathrm{A}$，$i_{L1}(0_-)=0$。

开关 S 打开后，电路的运算电路如题解 13－22 图所示。

列 KVL 方程
$$(2+2s)I_1(s)=2+\frac{2}{s}$$

得
$$I_1(s)=\frac{2+\frac{2}{s}}{2+2s}=\frac{1}{s}$$

$$U_{L2}(s)=sI_1(s)-2=s\cdot\frac{1}{s}-2=-1$$

所以　$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=\varepsilon(t)\mathrm{A}$，　$u_{L2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{L2}(s)]=-\delta(t)\mathrm{V}$

小结　$\xi(+)$ 拉氏变换为 $\dfrac{1}{\mathrm{S}}$，$\delta(t)$ 拉氏变换为 1，这是两个常用的拉氏变换对。

○ 13－23　$u_{C1}(t)=u_{C2}(t)=U_S(1-\dfrac{C_2}{C_1+C_2}e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)\mathrm{V}$

$$i_{C1}(t)=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S\delta(t)\mathrm{A}$$

$$i_{C2}(t)=\frac{C_2^2}{(C_1+C_2)^2}\cdot\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_S\delta(t)\mathrm{A}$$

○13－24　**题 13－24 图所示电路中两电容原来未充电，在 $t=0$ 时将开关 S 闭合，已知 $U_S=10\mathrm{V}$，$R=5\Omega$，$C_1=2\mathrm{F}$，$C_2=3\mathrm{F}$。求 $t\geqslant 0$ 时的 u_{C1}，u_{C2} 及 i_1、i_2、i。**

解　开关 S 闭合前电路处于零状态，开关 S 闭合后对应的运算电路如题解 13－24 图所示。

列结点电压方程 $(2s+\frac{1}{5}+3s)U_{n1}(s)=2s\cdot\frac{U_S}{s}$

得 $U_{n1}(s)=\frac{10U_S}{25s+1}=\frac{100}{25s+1}=\frac{4}{s+0.04}=U_{C2}(s)$

$$U_{C1}(s)=\frac{U_S}{s}-U_{n1}(s)=\frac{10}{s}-\frac{4}{s+0.04}$$

$$I(s)=\frac{1}{5}U_{n1}(s)=\frac{0.8}{s+0.04},$$

$$I_2(s)=3sU_{C2}(s)=\frac{12s}{s+0.04}=12-\frac{0.48}{s+0.04}$$

$$I_1(s)=I(s)+I_2(s)=12+\frac{0.32}{s+0.04}$$

从而，有

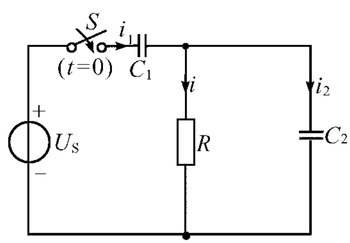
$$u_{C1}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C1}(s)]=(10-4e^{-0.04t})\varepsilon(t)\text{V}$$

$$u_{C2}(t)=\mathscr{L}^{-1}[U_{C2}(s)]=4e^{-0.04t}\varepsilon(t)\text{V}$$

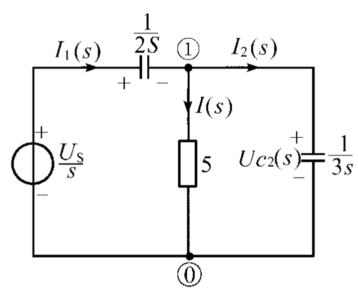
$$i_1(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_1(s)]=12\delta(t)+0.32e^{-0.04t}\text{A}$$

$$i_2(t)=\mathscr{L}^{-1}[I_2(s)]=12\delta(t)-0.48e^{-0.04t}\text{A}$$

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}[I(s)]=0.8e^{-0.04t}\varepsilon(t)\text{A}$$



题 13－24 **图**



题解 13－24 **图**

第十四章

网 络 函 数

学习要求

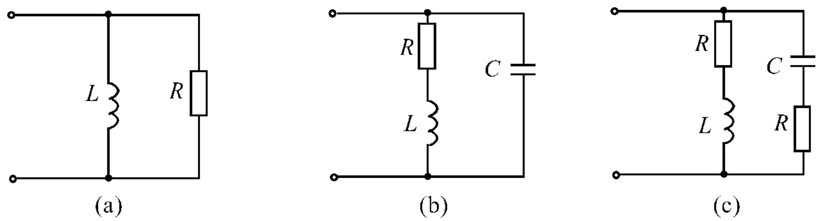
1. 深刻理解网络函数的定义、物理意义与分类，并会用多种方法求 $H(s)$。
2. 了解 $H(s)$ 的一般表示形式；深刻理解 $H(s)$ 的零点与极点概念，并会求解零、极点，会画零、极点图；相反地，会根据零、极点图求 $H(s)$。
3. 深刻理解和掌握电路固有频率（自然频率）的概念，并会求解。
4. 深刻理解零、极点分布对 $H(t)$ 的影响（大小和相位）；深刻理解电路频率响应的定义、物理意义与求解方法，并会根据频率响应求电路的正弦稳态响应。
5. 深刻理解和掌握卷积的定义并会求解；了解时域卷积定理，并会利用卷积法求电路的零状态响应。

知识网络图

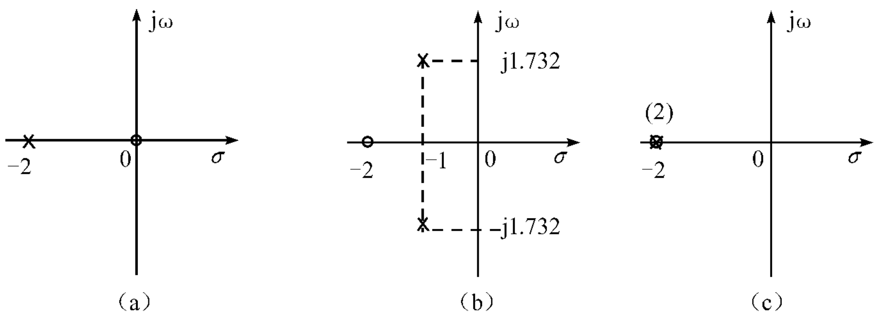
- 网络函数
  - 网络函数
    - 定义
    - 极点和零点及其响应性质
    - 频率特性 $H(j\omega)$
  - 卷积

课后习题全解

○ 14－1　试求题 14－1 图所示线性一端口的驱动点阻抗 $Z(s)$ 的表达式，并在 s 平面上绘出极点和零点。已知 $R = 1\Omega, L = 0.5\text{H}, C = 0.5\text{F}$。



题 14－1 图



题解 14－1 图

解　(1) 图(a) 电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 为

$$Z(s)=\frac{RsL}{R+sL}=\frac{0.5s}{0.5s+1}=\frac{s}{s+2}$$

$Z(s)$ 有一个零点：$z_1=0$；1 个极点 $p_1=-2$，$Z(s)$ 在 s 平面上的极点和零点位置如题解 14－1(a) 所示。

(2) 图(b) 电路的驱动点阻抗为

$$Z(s)=\frac{(R+sL)\dfrac{1}{sC}}{R+sL+\dfrac{1}{sC}}=\frac{sL+R}{LCs^2+RCs+1}=\frac{2(s+2)}{s^2+2s+4}$$

$Z(s)$ 有一个零点：$z_1=-2$；两个极点 $p_1=-1+\mathrm{j}1.732$，$p_2=-1-\mathrm{j}1.732$，$Z(s)$ 的极点、零点图如题解 14－1 图(b) 所示。

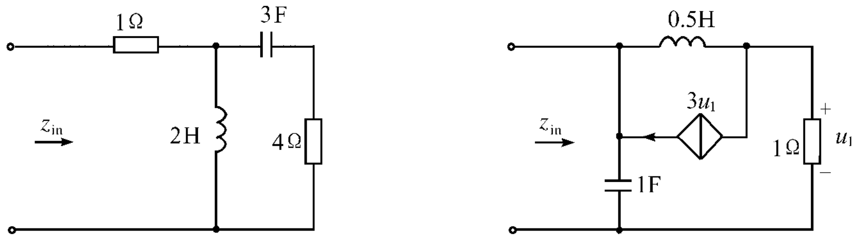
(3) 图(c) 电路的驱动点阻抗为

$$Z(s)=\frac{(R+sL)(\dfrac{1}{sC}+R)}{R+sL+\dfrac{1}{sC}+R}=\frac{(s+2)^2}{s^2+4s+4}=1$$

$Z(s)$ 有两阶零点：$z_1=z_2=-2$；二阶极点：$p_1=p_2=-2$。$Z(s)$ 的零点、极点

图如题解 14－1 图(c) 所示。

◯14－2　求题 14－2 图所示各电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 的表达式，并在 s 平面上绘出极点和零点。



(a)　　(b)

题 14－2 图

解　(1) 图(a) 电路的驱动点阻抗 $Z(s)$ 为

$$Z(s)=1+\frac{2s(\frac{1}{3s}+4)}{2s+\frac{1}{3s}+4}=1+\frac{2s(1+12s)}{6s^2+12s+1}=\frac{30s^2+14s+1}{6s^2+12s+1}$$

可求得 $Z(s)$ 有 2 个零点：$z_1=-0.08804$，$z_2=-0.37863$；2 个极点：$p_1=-0.08713$，$p_2=-1.91288$。在 s 平面上的极点和零点位置如题解 14—2 图(a) 所示。

(2) 为求解方便，将图(b) 电路等效变换为题解 14—2 图(b) 所示的电路，且在端口处加电压 $U(s)$，求出电流 $I(s)$，根据 KCL，KVL，有

$$I(s)=sU(s)+I_1(s)$$
$$U(s)=(0.5s+1)I_1(s)+1.5sI_1(s)$$

解得

$$I_1(s)=\frac{U(s)}{0.5s+1+1.5s}=\frac{U(s)}{2s+1}$$
$$I(s)=sU(s)+\frac{U(s)}{2s+1}=\frac{2s^2+s+1}{2s+1}U(s)$$

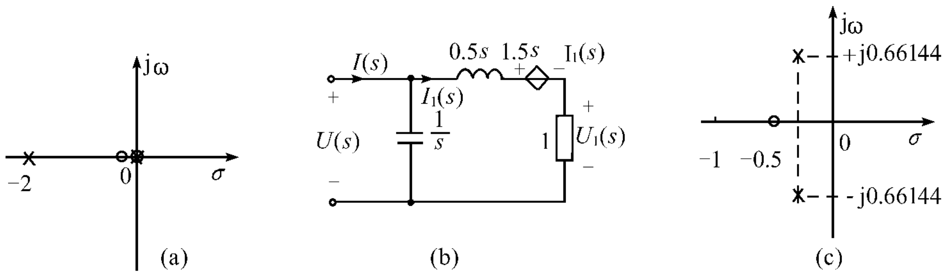
所以，驱动点阻抗为

$$Z_{in}(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=\frac{2s+1}{2s^2+s+1}$$

$Z_{in}(s)$ 有 1 个零点：$z=-\frac{1}{2}$；2 个极点：

$$p_1=-0.25+j0.66144,\quad p_2=-0.25-j0.66144$$

其零点、极点图如题解 14－2 图(c) 所示。



题解 14—2 图

○ 14—3　题 14—3 图所示为一线性电路，输入电流源的电流为 i_S。

(1) 试计算驱动点阻抗 $Z_d(s)=\dfrac{U_1(s)}{I_S(s)}$；

(2) 试计算转移阻抗 $Z_t(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_S(s)}$；

(3) 在 s 平面上给出 $Z_d(s)$ 和 $Z_t(s)$ 的极点和零点。

解　设输入电流源的电流 $I_S(s)$，计算电压 $U_1(s)$ 和 $U_2(s)$。

(1) 应用结点电压法，结点电压 $U_1(s)$ 满足方程

$$\left(\frac{55}{96}+\frac{125}{96s}+\frac{1}{0.2s+\dfrac{1}{\dfrac{1}{11}s}}\right)U_1(s)=I_S(s)$$

则

$$U_1(s)=\frac{96s(s^2+55)}{55(s^3+11s^2+55s+125)}I_S(s)$$
$$=\frac{96s(s^2+55)}{55(s+5)(s^2+6s+25)}I_S(s)$$

驱动点阻抗 $Z_d(s)$ 为

$$Z_d(s)=\frac{U_1(s)}{I_S(s)}=\frac{96s(s^2+55)}{55(s+5)(s^2+6s+25)}$$

(2) 因为电压 $U_2(s)$ 为

$$U_2(s)=\frac{\dfrac{11}{s}}{0.2s+\dfrac{1}{\dfrac{1}{11}s}}U_1(s)=\frac{55}{s^2+55}U_1(s)$$

把(1)中求出的电压 $U_1(s)$ 代入上式中，得

$$U_2(s)=\frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}I_S(s)$$

所以，转移阻抗 $Z_t(s)$ 为

$$Z_t(s)=\frac{U_2(s)}{I_S(s)}=\frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

(3) 由以上计算可求得驱动点阻抗 $Z_d(s)$ 有 3 个零点：

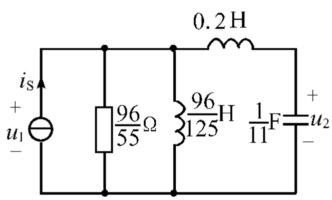
$$z_1=0,\qquad z_2=\mathrm{j}\sqrt{55},\qquad z_3=-\mathrm{j}\sqrt{55}$$

3 个极点：

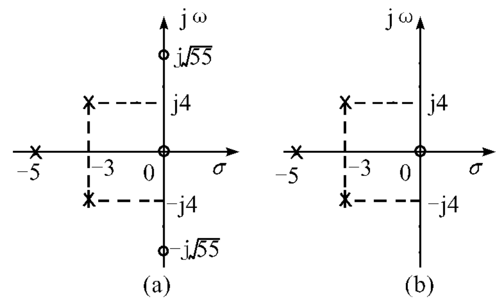
$$p_1=-5,\qquad p_2=-3+\mathrm{j}4,\qquad p_3=-3-\mathrm{j}4$$

其零点、极点图如题解 14－3 图(a) 所示。

同样可求得转移阻抗 $Z_t(s)$ 有 1 个零点：$z=0$；3 个极点与 $Z_d(s)$ 的 3 个极点相同。其零点、极点图如题解 14－3 图(b) 所示。

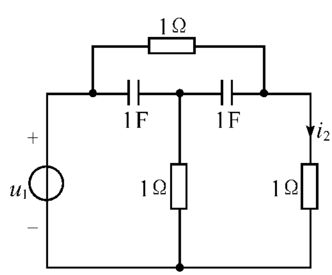


题 14－3 图



题解 14－3 图

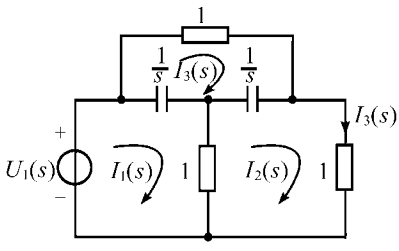
○ 14－4　题 14－4 图试求电路的转移导纳 $Y_{21}(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_1(s)}$，并在 s 平面上绘出零点和极点。

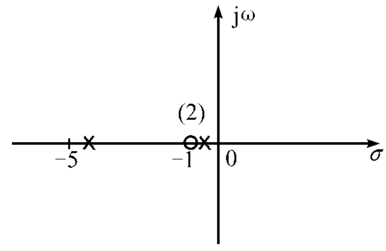


题 14－4 图

解　题 14－4 图所示电路运算电路如题解 14－4 图(a) 所示。应用回路电流法，列出方程为

$$\left(\frac{1}{s}+1\right)I_1(s)-I_2(s)-\frac{1}{s}I_3(s)=U_1(s) \qquad ①$$





题解 14－4 图

$$-I_1(s)+(2+\frac{1}{s})I_2(s)-\frac{1}{s}I_3(s)=0 \quad ②$$

$$-\frac{1}{s}I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)+(1+\frac{2}{s})I_3(s)=0 \quad ③$$

由式 ①,② 和式 ②,③ 分别消去 $I_1(s)$,得

$$(s^2+3s+1)I_2(s)-(2s+1)I_3(s)=s^2U_1(s)$$
$$(3s+1)I_2(s)-(s^2+2s+1)I_3(s)=0$$

解得

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & -(s+1)^2\\ s^2U_1(s) & -(2s+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3s+1 & -(s+1)^2\\ s^2+3s+1 & -(2s+1)\end{vmatrix}}=\frac{(s+1)^2U_1(s)}{s^2+5s+2}$$

故,转移导纳 $Y_{21}(s)$ 为

$$Y_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}=\frac{(s+1)^2}{s^2+5s+2}$$

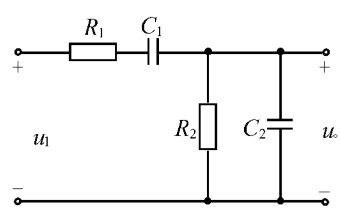
可求得 $Y_{21}(s)$ 有二阶零点:$z_1=z_2=-1$;2 个极点:

$$p_1=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}=-0.43845$$

$$p_2=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}=-4.56155$$

其零点、极点图如题解 14－4 图(b) 所示。

○ 14－5 题 14－5 图所示 RC 电路,求它的转移函数 $H(s)=\dfrac{U_0(s)}{U_1(s)}$。



题 14－5 图

解 设电压象函数为 $U_1(s)$ 和 $U_0(s)$,则有

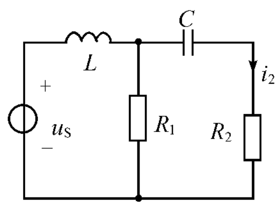
$$U_o(s) = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2}+sC_2}}{R_1+\dfrac{1}{sC_1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2}+sC_2}}U_1(s)$$

$$= \frac{R_2 s}{R_1R_2C_2s^2+(R_1+R_2+R_2\dfrac{C_2}{C_1})s+\dfrac{1}{C_1}}U_1(s)$$

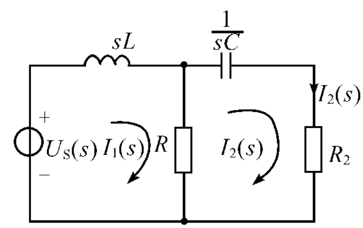
所以,其转移函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_1(s)} = \frac{\dfrac{1}{R_1C_2}s}{s^2+s(\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{1}{R_1C_2}+\dfrac{1}{R_1C_1})+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

◎ 14－6　题 14－6 图所示电路中 $L=0.2\text{H}$,$C=0.1\text{F}$,$R_1=6\Omega$,$R_2=4\Omega$,$u_S(t)=7e^{-2t}\text{V}$,求 R_2 中的电流 $i_2(t)$,并求网络函数 $H(s)=\dfrac{I_2(s)}{U_S(s)}$ 及单位冲激响应。



题 14－6 图



题解 14－6 图

分析　画出对应的运算电路,应用回路电流法求解即可,网络函数 $H(s)$ 进行拉氏反变换即可得单位冲激响应 $h(t)$。

解　题 14－6 图所示电路的运算电路如题解 14－6 图所示,其中电压源电压为

$$U_S(s) = \frac{7}{s+2}$$

应用回路电流法,对所选取的回路电流列出方程为

$$(sL+R_1)I_1(s)-R_1I_2(s)=U_S(s)$$

$$-R_1I_1(s)+(R_1+\frac{1}{sC}+R_2)I_2(s)=0$$

代入已知参数值,得

$$(0.2s+6)I_1(s)-6I_2(s)=U_S(s)$$

$$-6I_1(s)+(10+\frac{1}{0.1s})I_2(s)=0$$

解得

$$I_2(s)=\frac{3s}{s^2+13s+30}U_S(s)=\frac{21s}{(s+3)(s+10)(s+2)}$$

$$=\frac{9}{s+3}-\frac{3.75}{s+10}-\frac{5.25}{s+2}$$

故有

$$i_2(t)=(9e^{-3t}-3.75e^{-10t}-5.25e^{-2t})\text{A}$$

网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{U_2(s)}=\frac{3s}{(s+3)(s+10)}=\frac{K_1}{s+3}+\frac{K_2}{s+10}$$

经计算得 $\quad K_1=-\frac{9}{7},\qquad K_2=\frac{30}{7}$

故可得单位冲激响应 $\quad h(t)=-\frac{9}{7}e^{-3t}+\frac{30}{7}e^{-10t}$

○ 14－7 **已知网络函数为**

(1) $H(s)=\dfrac{2}{s-0.3}$；　　(2) $H(s)=\dfrac{s-5}{s^2-10s+125}$；

(3) $H(s)=\dfrac{s+10}{s^2+20s+500}$。

试定性作出单位冲激响应的波形。

解 (1) $\quad h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s-0.3}\right]=2e^{0.3t}$

由于 $H(s)$ 有 1 个极点，$p_1=0.3$，且为正值，所以，单位冲激响应 $h(t)$ 随 t 按指数增长，其波形如题解 14－7 图(a) 所示。

(2) 因为 $H(s)$ 的分母 $D(s)=0$ 的根 $p_1=5+\text{j}10$，$p_2=5-\text{j}10$ 为共轭复根。所以，设 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{s-5}{s^2-10s+125}=\frac{K_1}{s-5-\text{j}10}+\frac{K_2}{s-5+\text{j}10}$$

计算得

$$K_1=\frac{1}{2},\qquad K_2=K_1^*=\frac{1}{2}$$

故

$$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=2\mid K_1\mid e^{5t}\cos(10t)=e^{5t}\cos(10t)$$

由于 $H(s)$ 的极点是一对共轭复根，且实部为正值，所以单位冲激响应 $h(t)$ 是按增长的余弦规律变化，其波形如题解 14－7 图(b) 所示。

(3) 因为 $H(s)$ 的分母 $D(s)=0$ 的根为 $p_1=-10+\text{j}20$，$p_2=-10-\text{j}20$ 是共轭复根。

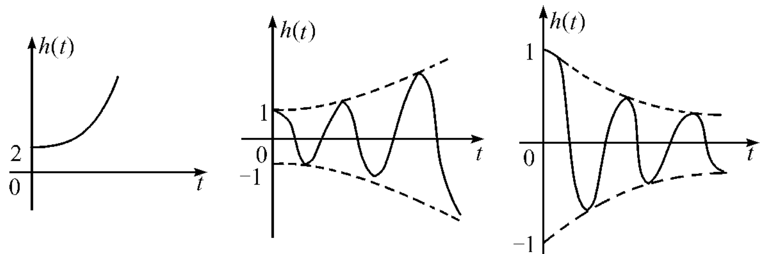
所以，设 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{s+10}{s^2+20s+500}=\frac{K_1}{s+10-\mathrm{j}20}+\frac{K_2}{s+10+\mathrm{j}20}$$

可求得　$K_1=\dfrac{1}{2}$，　$K_2=K_1^*=\dfrac{1}{2}$

故　$h(t)=\mathscr{L}^{-1}[H(s)]=2\mid K_1\mid \mathrm{e}^{-10t}\cos(20t)=\mathrm{e}^{-10t}\cos(20t)$

由于 $H(s)$ 有一对共轭复根，且实部为负值，所以，单位冲激响应 $h(t)$ 是按衰减的余弦规律变化，其波形如题解 14－7 图(c) 所示。



(a)　(b)　(c)

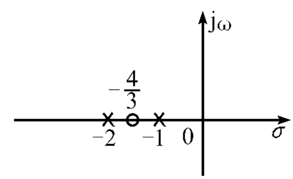
题解 14－7 图

○ 14－8　设某线性电路的冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}$，试求相应的网络函数并绘出极点、零点图。

解　所求线性电路的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

$$=\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$



题解 14－8 图

显然，$H(s)$ 有一个零点：$z_1=-\dfrac{4}{3}$；2 个极点：

$$p_1=-1,\quad p_2=-2$$

其极点、零点图如题解 14－8 图所示。

◎ 14－9　设网络的冲激响应为：

(1) $h(t)=\delta(t)+\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-t}$；

(2) $h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t+\theta)$；

(3) $h(t)=\dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{7}{9}t\mathrm{e}^{-3t}+3t$。

试求相应的网络函数的极点。

分析　冲激函数 $h(t)$ 拉氏变换后即为网络函数 $H(s)$，根据 $H(s)$ 函数表达式即可求出相应极点。

解 (1)$h(t)$ 相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=1+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+1}=\frac{5s+8}{5(s+1)}$$

所以，$H(s)$ 有 1 个极点：$p_1=-1$；1 个零点：$z_1=-\dfrac{8}{5}$。

(2) 因为

$$\begin{aligned}h(t)&=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t+\theta)=\mathrm{e}^{-\alpha t}(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)\\&=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t\cos\theta+\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\sin\theta\end{aligned}$$

其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{\omega\cos\theta+(s+\alpha)\sin\theta}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

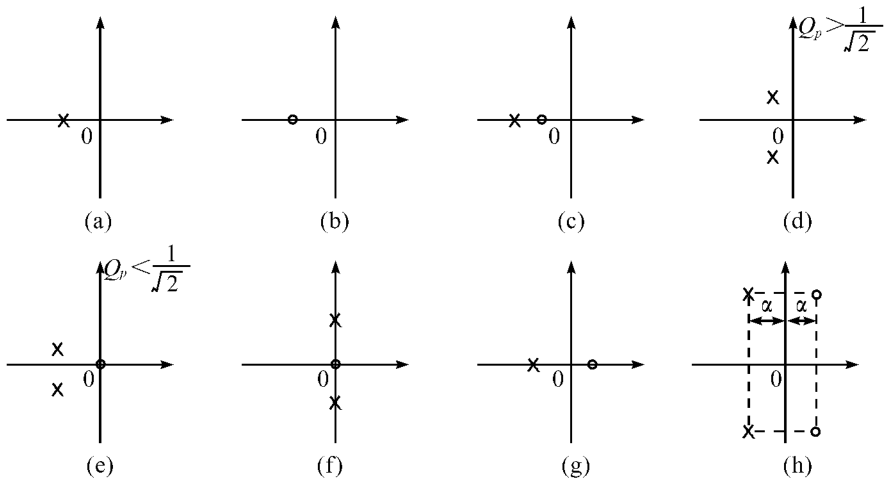
$H(s)$ 有极点：$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega$，$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega$ 为共轭复根；1 个零点：$z_1=-\dfrac{\alpha\sin\theta+\omega\cos\theta}{\sin\theta}$。

(3)$h(t)$ 相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$\begin{aligned}H(s)&=\mathscr{L}[h(t)]=\frac{3}{5}\frac{1}{s+1}-\frac{7}{9}\frac{1}{(s+3)^2}+\frac{3}{s^2}\\&=\frac{27s^4+262s^3+1153s^2+2025s+1215}{45s^2(s+1)(s+3)^2}\end{aligned}$$

所以，$H(s)$ 有 5 个极点：$p_1=p_2=0$(二阶极点)，$p_3=-1$，$p_4=p_5=-3$。

○ 14－10 画出与题 14－10 图中零、极点分布相应的幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$。



题 14－10 图

解 根据图(a)的零点、极点分布可知，只有 1 个极点：$p_1=-\alpha$，其相应的网络函数 $H(s)$ 可设为

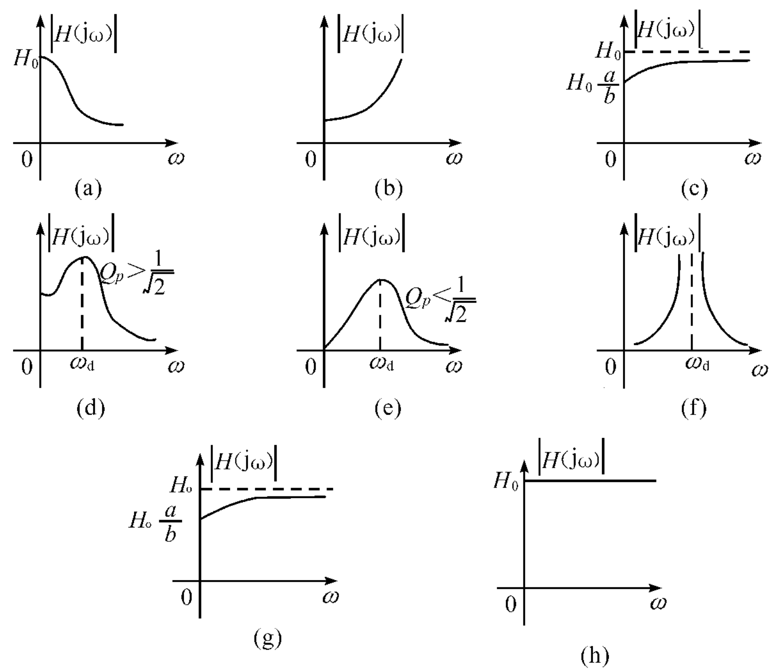
$$H(s) = \frac{H_0}{s+\alpha}$$

对应的幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 ω 的增长而单调减小，$|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14－10 图(a) 所示。

(2) 由图(b) 的零点、极点分布可知，只有 1 个零点：$z_1 = -\alpha$，其相应的网络函数 $H(s)$ 可设为

$$H(s) = H_0(s+\alpha)$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 如题解 14－10 图(b) 所示。



题解 14－10 图

(3) 由图(c) 的零点、极点分布可知，有 1 个零点：$z_1 = -a$；1 个极点：$p_1 = -b$ 且 $a < b$，其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = H_0\,\frac{s+a}{s+b}$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega = 0$ 时，有

$$|H(\mathrm{j}0)| = H_0\,\frac{a}{b} < H_0$$

而当 $\omega \to \infty$ 时，有 $|H(\mathrm{j}\omega)| = H_0$，所以，$|H((\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14－10 图(c) 所示。

(4) 由图(d) 零点、极点分布可知，有 2 个极点：$p_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$，$p_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}$

为共轭复根，其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(S)=\frac{H_0}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=\frac{H_0}{(s+\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 $\omega\to\infty$ 而衰减，但由于 $Q_p>\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以，当 $\omega\approx\omega_\mathrm{d}$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 将出现峰值，$|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14－10 图(d) 所示。

(5) 由图(e) 的零点、极点分布可知，有 2 个极点：$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$，$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根；1 个零点：$z_1=0$，其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_0 s}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=\frac{H_0 s}{(s+\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

其幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时，有 $|H(\mathrm{j}0)|=0$；当 $\omega\to\infty$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$；而当 $\omega\approx\omega_\mathrm{d}$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 达到最大值。由于此时有 $Q_p<\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 随 ω 的变化较平坦，如题解 14－10 图(e) 所示。

(6) 由图(f) 的零点、极点分布可知，有 2 个极点：$p_1=\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$，$p_2=-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根；1 个零点：$z_1=0$，其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{H_0 s}{(s-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=\frac{H_0 s}{s^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时，$|H(\mathrm{j}0)|=0$；当 $\omega\to\infty$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|=0$；当 $\omega=\omega_\mathrm{d}$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|$ 达到无穷大，所以，幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 的波形如题解 14－10 图(f) 所示。

(7) 由图(g) 的零点、极点分布可知，有 1 个极点：$p_1=-b$；1 个零点：$z_1=a$，其中 $b>a>0$。相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_0\,\frac{s-a}{s+b}$$

其 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时，有 $|H(\mathrm{j}0)|=H_0\,\frac{a}{b}$；当 $\omega\to\infty$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|=H_0$，所以，幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 如题解 14－10 图(g) 所示。

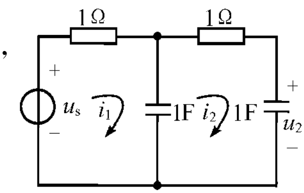
(8) 由图(h) 的零点、极点分布可知，有 2 个极点：$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$；$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根；2 个零点：$z_1=\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$，$z_1=\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$ 为共轭复根，其相应的网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=H_0\,\frac{(s-\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s-\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}{(s+\alpha-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})(s+\alpha+\mathrm{j}\omega_\mathrm{d})}=H_0\,\frac{(s-\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}{(s+\alpha)^2+\omega_\mathrm{d}^2}$$

幅频响应 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在 $\omega=0$ 时，$|H(\mathrm{j}0)|=H_0$；当 $\omega\to\infty$ 时，$|H(\mathrm{j}\omega)|=H_0$，所以，$|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 如题解 14－10 图(h) 所示。

○ 14－11　已知电路如题 14－11 图所示，求网络函数 $H(s)=\frac{U_2(s)}{U_\mathrm{S}(s)}$，定性画出幅频

特性和相频特性示意图。



题 14—11 图

解 设电压象函数为 $U_S(s)$ 和 $U_2(s)$。应用回路电流法，根据图示选取的网孔电流列出方程

$$(1+\frac{1}{s})I_1(s)-\frac{1}{s}I_2(s)=U_S(s)$$

$$-\frac{1}{s}I_1(s)+(1+\frac{2}{s})I_2(s)=0$$

解得

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_S(s)}=\frac{1}{s^2+3s+1}$$

显然，$H(s)$ 有 2 个极点：

$$p_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}=-0.38197$$

$$p_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}=-2.61803$$

均为负实数，其零点、极点图如题解 14—11 图(a) 所示。且幅频特性 $|H(j\omega)|$ 和相频特性 $\theta(\omega)$ 分别为

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{|(j\omega)^2+3j\omega+1|}=\frac{1}{|j\omega-p_1||j\omega-p_2|}$$

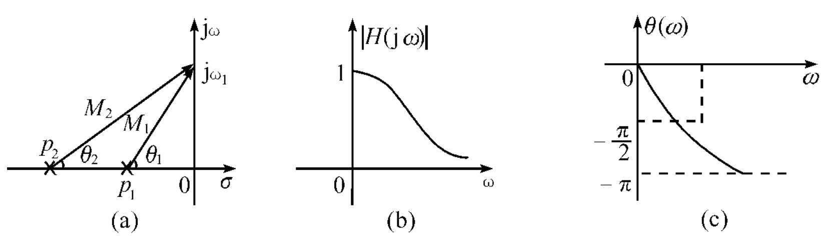
$$\theta(\omega)=\arg[H(j\omega)]=-[\arg(j\omega-p_1)+\arg(j\omega-p_2)]$$

当 $\omega=\omega_1$ 时，有

$$|H(j\omega_1)|=\frac{1}{|j\omega-p_1||j\omega-p_2|}=\frac{1}{M_1M_2}$$

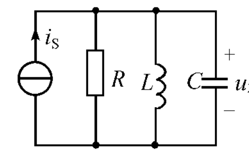
$$\theta(\omega_1)=\arg[H(j\omega_1)]=-(\theta_1+\theta_2)$$

定性的幅频特性和相频特性的图形如题解 14—11 图(b)、(c) 所示。



题解 14—11 图

◎14—12 题 14—12 图所示电路为 RLC 并联电路，试用网络函数的图解法分析 $H(s)=\frac{U_2(s)}{I_S(s)}$ 的频率响应特性。



题 14－12 图

分析 根据运算电路求解 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{I_S(s)}$，把 $S=j\omega$ 代入即可求解频率响应特性。

解 图示电路中，网络函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{I_S(s)}=\frac{1}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{sL}+sC}$$

$$=\frac{\dfrac{s}{C}}{s^2+\dfrac{1}{RC}s+\dfrac{1}{LC}}$$

$$=\frac{1}{C}\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$=H_0\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

令 $s=j\omega$，有

$$H(j\omega)=\frac{U_2}{I_S}=H_0\frac{j\omega}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)}$$

显然，$H(j\omega)$ 在 $\omega=0$ 处，有 1 个零点；设极点为一对共轭复数，即

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{1}{2RC})^2}=-\delta\pm j\omega_d$$

上式中，$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$，而 $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\omega_d^2+\delta^2}$。可画出 $H(s)$ 的零点、极点图如题解 14－12 图(a) 所示。当 $\omega=\omega_1$ 时，有

$$|H(j\omega_1)|=\frac{H_0|H(j\omega)|}{|j\omega-p_1||j\omega-p_2|}=\frac{H_0\omega_1}{M_1M_2}$$

$$\theta(\omega_1)=\arg[H(j\omega_1)]=\frac{\pi}{2}-(\theta_1+\theta_2)$$

当 $\omega=0$ 时，$|H(j0)|=0$，$\theta(\omega)=\dfrac{\pi}{2}$；当 $\omega\to\infty$ 时，$|H(j\omega)|=0$，$\theta(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$；当 $\omega\approx\omega_0$ 时，$|H(j\omega)|$ 达到最大值，$\theta(\omega)=0$。定性绘出的幅频特性和相频特性如题解 14－12 图(b)，(c) 所示。

○14－13 略

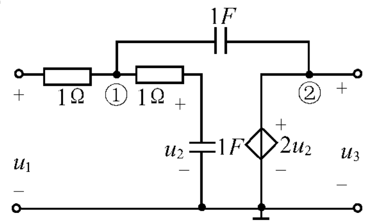
● 14－14 题 14－14 图所示电路，试求：

(1) 网络函数 $H(s)=\dfrac{U_3(s)}{U_1(s)}$，并绘出幅频特性示意图；

(2) 求冲激响应 $h(t)$。

分析 列写结点电压方程求解即可。

解　(1) 对图示电路应用结点电压法,结点电压 $U_{n1}(s)$ 和 $U_3(s)$ 的方程为



题 14－14 图

$$\left(1+s+\frac{s}{s+1}\right)U_{n1}(s)-sU_3(s)=U_1(s)$$

$$U_3(s)=2U_2(s)$$

$$U_2(s)=\frac{1}{s+1}U_{n1}(s)$$

将以上三式中 $U_{n1}(s)$,$U_2(s)$ 消去,可解得

$$H(s)=\frac{U_3(s)}{U_1(s)}=\frac{2}{s^2+s+1}=\frac{2}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

显然,$H(s)$ 有 2 个极点:$p_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$,$p_2=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为共轭复数,其零点、极点图如题解 14－14 图(a) 所示。令 $s=\mathrm{j}\omega$,有

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{U_3}{U_1}=\frac{2}{(\mathrm{j}\omega-p_1)(\mathrm{j}\omega-p_2)}$$

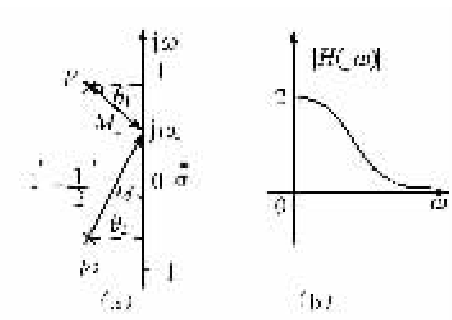
当 $\omega=\omega_1$ 时,则有

$$|H(\mathrm{j}\omega_1)|=\frac{2}{|\mathrm{j}\omega_1-p_1||\mathrm{j}\omega_1-p_2|}=\frac{2}{M_1M_2}$$

定性地绘出幅频特性 $|H(\mathrm{j}\omega)|-\omega$ 示意图如题解 14－14 图(b) 所示。

(2) 因为网络函数 $H(s)$ 可展开为

$$H(s)=\frac{2}{s^2+s+1}=\frac{K_1}{s+\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{K_2}{s+\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



题解 14－14 图

经计算,可求得:

$$K_1=1.155\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}},\qquad K_2=K_1^*=1.155\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

故冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = 2\,|K_1|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{2})$$

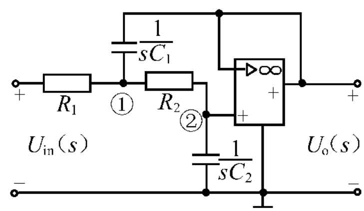
$$= 2.31\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

小结　网络函数 $H(s)$ 进行拉氏反变换即得冲激响应 $h(t)$，二者是一一对应关系。

●14－15　求题 14－15 图所示电路的电压转移函数 $H(s) = \dfrac{U_0(s)}{U_{in}(s)}$，设运放是理想的。

分析　列写结点电压方程，根据理想运放的虚短、虚断规则求解即可。

解　应用结点电压法，根据选取的结点电压 $U_{n1}(s)$ 和 $U_{n2}(s)$ 可列出方程，并注意到理想运放的规则 1（虚断路），得



题 14－15 图

$$(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC_1)U_{n1}(s) - \frac{1}{R_2}U_{n2}(s) - sC_1U_0(s) = \frac{U_{in}(s)}{R_1} \quad ①$$

$$-\frac{1}{R_2}U_{n1}(s) + (\frac{1}{R_2} + sC_2)U_{n2}(s) = 0 \quad ②$$

运用理想运放的规则 2（虚短路），得：$U_{n2}(s) = U_0(s)$，代入到方程式 ① 和 ② 中，解得该电路的电压转移函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_{in}(s)} = \frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + s(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})R_1R_2C_2 + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2}) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

小结　理想运放中虚短、虚断规则是极为重要的解题条件。

○ 14－16　(1) $L = \sqrt{2}H$，$C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $|H(\mathrm{j}\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^4}}$

第十五章

电路方程的矩阵形式

学习要求

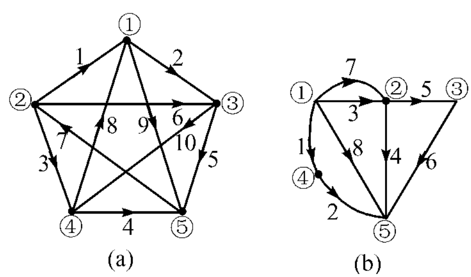
1. 知道什么叫割集、基本回路、基本割集；能写出关联矩阵 A，基本回路矩阵 B、基本割集矩阵 Q，并了解 A，B，Q 之间关系。
2. 能写出用 A，B，Q 表示的 KCL，KVL 方程，能写出矩阵形式的支路伏安关系。
3. 能写出基本回路电流方程、独立结点电位方程、基本割集电压方程，并会求解这些方程。
4. 知道什么叫状态变量、状态向量、初始状态向量、状态方程、输出方程；会选择状态变量；会列写电路的状态方程和输出方程，并写成矩阵形式。

知识网络图

- 电路方程和矩阵形式
  - 图的基本概念
    - 有向图
    - 树
    - 基本回路
    - 基本割集
  - 主要矩阵
    - 关联矩阵
    - 回路矩阵
    - 割集矩阵
  - 用矩阵表示的电路方程
    - KVL、KCL 矩阵方程
    - 回路电流矩阵方程
    - 结点电压矩阵方程
    - 割集电压矩阵方程
    - 列表矩阵方程
  - 状态方程

课后习题全解

○ 15—1　**以结点⑤为参考，写出题 15—11 图所示有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$。**



题 15—1 图

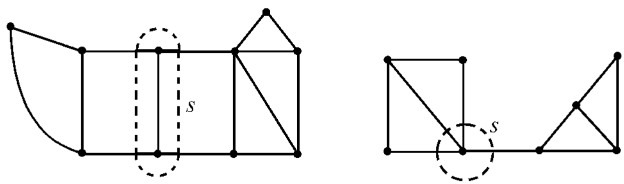
解　(a) 有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\\ ④\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) 有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$
A = \begin{array}{c}
 \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

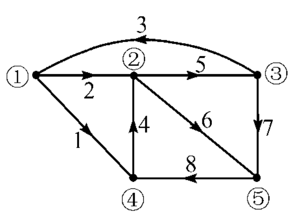
○ 15－2　**对于题 15－2 图(a)和(b),与用虚线画出的闭合面 S 相切割的支路集合是否构成割集?为什么?**



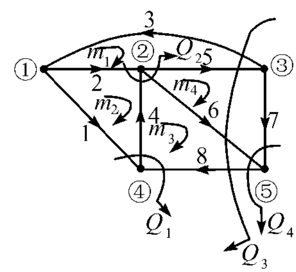
题 15－2 图

解　对于图(a)和(b),与用虚线画出的闭合面 S 相切割的支路集合不构成割集。因为连通图 G 的一个割集是 G 的一个支路的集合,把这些支路移去将绕 G 恰好分离为两个部分,但是如果少移去其中一条支路,G 仍将是连通的。而该图中若把与图示中闭合面 S 相切割的支路集合移去,图 G 将分离为三个部分。

◎ 15－3　**对于题 15－3 图所示有向图,若选支路 1、2、3、7 为树,试写出基本割集矩阵和基本回路矩阵;另外,以网孔作为回路写出回路矩阵。**



题 15－3 图



题解 15－3 图

分析　根据基本割集矩阵与基本回路矩阵的定义求解即可。

解　选(1、2、3、7)为树,基本割集矩阵为单树支割集组即:Q_1(1,4,8),Q_2(2,4,5,6),Q_3(3,5,6,8),Q_4(7,6,8)如题解 15－3 图所示。

从而,基本割集矩阵为

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{array} \\
\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}} = \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

基本回路矩阵为选定树支后的单连支回路组。以(1,2,3,7)为树的单连支回路组为：l_1(1,2,4)，l_2(2,3,5)，l_3(1,3,7,8)，l_4(2,3,6,7)，与 Q_{f} 相统一，按先树支，后连支的顺序，可写出基本回路矩阵为（若要体现连支部分为单位矩阵可将 l_3 与 l_4 互换）

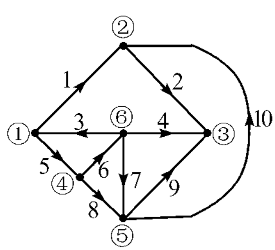
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 8 \end{array} \\
\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}} = \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

若以网孔作回路，如题解 15－3 图所示。回路组为

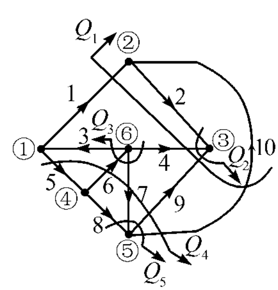
m_1(2,3,5)，m_2(1,2,4)，m_3(4,6,8)，m_4(5,6,7) 则回路矩阵为

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} = \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

◯15－4　对于题 15－4 图所示有向图，若选支路 1、2、3、5、8 为树，试写出基本割集矩阵和基本回路矩阵。



题 15－4 图



题解 15－4 图

解　选树为(1,2,3,5,8),如题解15—4图所示。

单树支割集组为:$Q_1(1,4,9,10)$,$Q_2(2,4,9)$,$Q_3(3,4,6,7)$,$Q_4(5,6,7,9,10)$,$Q_5(8,7,9,10)$其基本割集矩阵$\boldsymbol{Q}_f$为

$$\boldsymbol{Q}_f=\begin{array}{c}\\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\\ Q_4\\ Q_5\end{array}\begin{bmatrix}1&2&3&5&8&4&6&7&9&10\\1&0&0&0&0&1&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1&-1&-1\\0&0&0&0&1&0&0&1&-1&-1\end{bmatrix}=[1_t\ \vdots\ Q_l]$$

单连支回路组为:$l_1(4,1,2,3)$,$l_2(6,3,5)$,$l_3(7,3,5,8)$,$l_4(9,1,2,5,8)$,$l_5(10,1,5,8)$其基本回路矩阵$\boldsymbol{B}_f$为

$$\boldsymbol{B}_f=\begin{array}{c}\\ l_1\\ l_2\\ l_3\\ l_4\\ l_5\end{array}\begin{bmatrix}1&2&3&5&8&4&6&7&9&10\\-1&-1&-1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&-1&-1&-1&0&0&1&0&0\\-1&-1&0&1&1&0&0&0&1&0\\-1&0&0&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=[-Q_l^T\ \vdots\ 1_l]$$

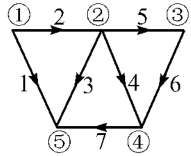
可见,若$\boldsymbol{B}_f$、$\boldsymbol{Q}_f$的各列按相同支路编号排列,有关系$\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{Q}_f^{\mathrm{T}}=0$或$\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{B}_f^{\mathrm{T}}=0$

○ 15—5　对题15—5图所示有向图,若选结点⑤为参考,并选支路1、2、4、5为树。试写出关联矩阵、基本回路矩阵和基本割集矩阵;并验证$\boldsymbol{B}_t^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}_t^{-1}\boldsymbol{A}_1$和$\boldsymbol{Q}_1=-\boldsymbol{B}_t^{\mathrm{T}}$。

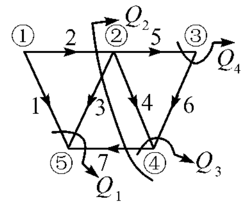
解　以结点⑤为参考,选树为(1,2,4,5)

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\\ ④\end{array}\begin{bmatrix}1&2&4&5&3&6&7\\1&1&0&0&0&0&0\\0&-1&1&1&1&0&0\\0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&-1&0&0&-1&1\end{bmatrix}=(A_t\ \vdots\ A_l)$$

如题解15—5图所示,单树支割集组为:$Q_1(1,3,7)$,$Q_2(2,3,7)$,$Q_3(4,6,7)$,$Q_4(5,6)$。其基本割集矩阵为



题 15—5 图



题解 15—5 图

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}} = \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = [\mathbf{1}_{\mathrm{t}} \vdots \boldsymbol{Q}_{\mathrm{l}}]$$

单连支回路组为：$l_1(3,1,2)$，$l_2(6,4,5)$，$l_3(7,1,2,4)$。其基本回路矩阵为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}} = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = [B_t \vdots 1_l]$$

比较 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}$，可得
$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{l}} = -\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}$$

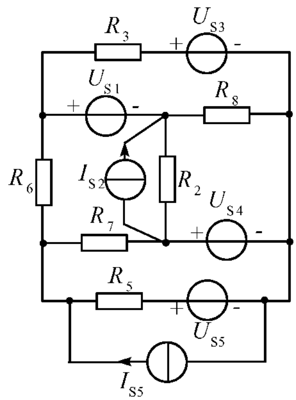
又因
$$-\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_{\mathrm{l}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}$$

所以有
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_{\mathrm{l}}$$

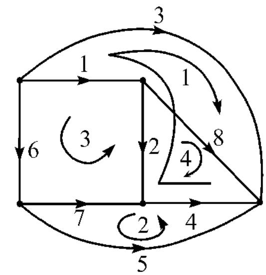
○ 15—6　对题 15—6 图所示电路，选支路 1、2、4、7 为树，用矩阵形式列出其回路电流方程。各支路电阻均为 5Ω，各电压源电压均为 3V，各电流源电流均为 2A。

解　选(1,2,4,7)为树，选基本回路为单连支回路，且选回路电流的方向与有向图题解 15—6 图中相应的连支方向一致。单连支回路组为：$l_1(3,1,2,4)$，$l_2(5,4,7)$，$l_3(6,1,2,7)$，$l_4(8,2,4)$。

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



题 15－6 图



题解 15－6 图

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}(0, R_2, R_3, 0, R_5, R_6, R_7, R_8)$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S = [-\dot{U}_{S1} \quad 0 \quad -\dot{U}_{S3} \quad -\dot{U}_{S4} \quad -\dot{U}_{S5} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_S = [0 \quad \dot{I}_{S2} \quad 0 \quad 0 \quad \dot{I}_{S5} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

则
$$\boldsymbol{BRB}^T = \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & 0 & R_2 & R_2 \\ 0 & R_5 + R_7 & -R_7 & 0 \\ R_2 & -R_7 & R_2 + R_6 + R_7 & R_2 \\ R_2 & 0 & R_2 & R_2 + R_8 \end{bmatrix} \qquad ①$$

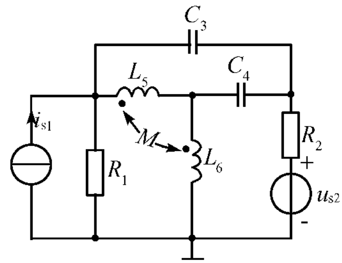
$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_S - \boldsymbol{BR}\dot{\boldsymbol{I}}_S = \begin{bmatrix} \dot{U}_{S1} - \dot{U}_{S2} + \dot{U}_{S4} + R_2 \dot{I}_{S2} \\ \dot{U}_{S4} - \dot{U}_{S5} - R_2 \dot{I}_{S2} \\ \dot{U}_{S1} + R_2 \dot{I}_{S2} \\ \dot{U}_{S4} + R_2 \dot{I}_{S2} \end{bmatrix} \qquad ②$$

回路电流方程的矩阵形式为　　$\boldsymbol{BRB}^T \dot{\boldsymbol{I}}_L = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_S - \boldsymbol{BR}\dot{\boldsymbol{I}}_S$

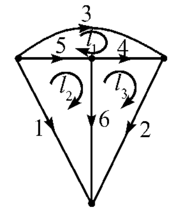
将已知数值入式 ①、式 ② 可得回路电流方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \\ 5 & -5 & 15 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \\ \dot{I}_{l3} \\ \dot{I}_{l4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -10 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix}$$

◎ 15－7　**对题** 15－7 **图所示电路，用运算形式（设零值初始条件）在下列** 2 **种不同情况下列出网孔电流方程：**(1) **电感** L_5 **和** L_6 **之间无互感；**(2)L_5 **和** L_6 **之间有互感** M。



题 15－7 图



题解 15－7 图

分析 先列写电路的回路矩阵，再由网孔电流方程 $Z_L(s)I_l(s)=BU_S(s)-BZ(s)I_S(s)$，即可求解。

解 （1）如题解 15－7 图所示电感 L_5 和 L_6 之间 无互感

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z}(s)=\mathrm{diag}\left[R_1,R_2,\frac{1}{sC_3},\frac{1}{sC_4},sL_5,sL_6\right]$$

$$\boldsymbol{U}_S(s)=\begin{bmatrix}0 & -U_{S2}(s) & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{I}_S(s)=\begin{bmatrix}I_{S1}(s) & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Z}_L(s)=\boldsymbol{BZ}(s)\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix} sL_5+\dfrac{1}{sC_3}+\dfrac{1}{sC_4} & -sL_5 & -\dfrac{1}{sC_4} \\ -sL_5 & R_1+s(L_5+L_6) & -sL_6 \\ -\dfrac{1}{sC_4} & -sL_6 & R_2+\dfrac{1}{sC_4}+sL_6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_S(s)-\boldsymbol{BZ}(s)\dot{\boldsymbol{I}}_S(s)=\begin{bmatrix}0 \\ R_1\dot{I}_{S1}(s) \\ -\dot{U}_{S2}(s)\end{bmatrix}$$

该电路的网孔电流方程为 $\boldsymbol{Z}_L(s)\dot{\boldsymbol{I}}_l(s)=\boldsymbol{BU}_S(s)-\boldsymbol{BZ}(s)\dot{I}_S(s)$

即
$$\begin{bmatrix} sL_5+\dfrac{1}{sC_3}+\dfrac{1}{sC_4} & -sL_5 & -\dfrac{1}{sC_4} \\ -sL_5 & R_1+s(L_5+L_6) & -sL_6 \\ -\dfrac{1}{sC_4} & -sL_6 & R_2+\dfrac{1}{sC_4}+sL_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{l1}(s) \\ I_{l2}(s) \\ I_{l3}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ R_1I_{S1}(s) \\ -U_{S2}(s)\end{bmatrix}$$

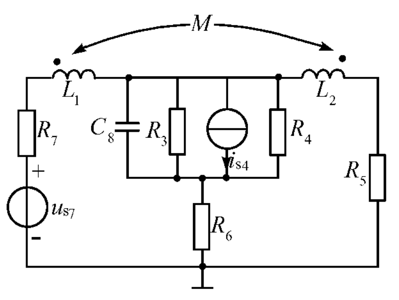
(2) 电感 L_5 和 L_6 之间有互感 M,矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}(s)$ 和 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}(s)$ 均不变,只有支路运算阻抗 $\boldsymbol{Z}(s)$ 有变化,即

$$\boldsymbol{Z}(s)=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 & sM \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sM & sL_6 \end{bmatrix}$$

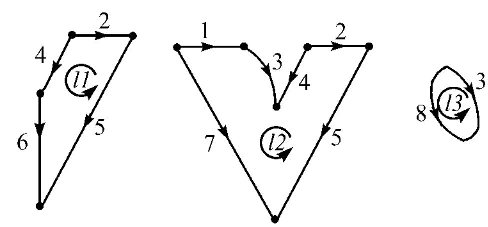
同理,得到电路的网孔电流方程为

$$\begin{bmatrix} sL_5+\dfrac{1}{sC_3}+\dfrac{1}{sC_4} & -s(L_5+M) & -\dfrac{1}{sC_4}+sM \\ -s(L_5+M) & R_1+s(L_5+L_6+2M) & -s(L_6+M) \\ -\dfrac{1}{sC_4} & -s(L_6+M) & R_2+\dfrac{1}{sC_4}+sL_6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{l1}(s) \\ I_{l2}(s) \\ I_{l3}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ R_1 I_{\mathrm{S1}}(s) \\ -U_{\mathrm{S2}}(s) \end{bmatrix}$$

○ 15－8　对题 15－8 图所示电路,选支路 1、2、3、4、5 为树,试写出此电路回路电流方程的矩阵形式。



题 15－8 图



题解 15－8 图

解　选树(1,2,3,4,5)单连支回路组为:$l_1(6,4,2,5)$,$l_2(7,1,2,3,4,5)$,$l_3(8,3)$且选回路电流的方向与连支方向一致,如题解 15－8 图所示。

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

支路运算阻抗矩阵为

$$
\boldsymbol{Z}(s)=\begin{bmatrix}
sL_1 & -sM & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-sM & sL_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{sC_8}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}(s)=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad -U_{\mathrm{S7}}(s)\quad 0]^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}(s)=[0\quad 0\quad 0\quad -I_{\mathrm{S4}}(s)\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}
$$

将以上矩阵代入到式 $\boldsymbol{BZ}(s)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_l(s)=\boldsymbol{BU}_{\mathrm{S}}(s)-\boldsymbol{BZ}(s)\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}(s)$ 中，可得回路电流方程的矩阵形式为

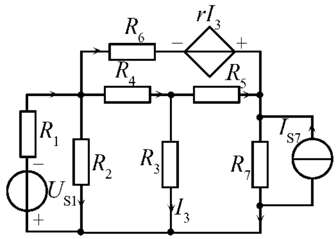
$$
\begin{bmatrix}
sL_2+R_4+R_5+R_6 & sL_2-sM+R_4+R_5 & 0\\
sL_2-sM+R_4+R_5 & s(L_1+L_2-2M)+R_3+R_4+R_5+R_7 & R_3\\
0 & R_3 & R_3+\dfrac{1}{sC_8}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
I_{l1}(s)\\ I_{l2}(s)\\ I_{l3}(s)
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
R_4 I_{\mathrm{S4}}(s)\\
-U_{\mathrm{S7}}(s)+R_4 I_{\mathrm{S4}}(s)\\
0
\end{bmatrix}
$$

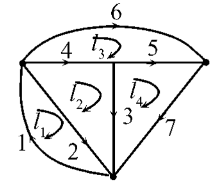
○ 15－9　写出题 15－9 图所示电路网孔电流方程的矩阵形式。

解　电路的有向图如题解 15－9 图所示，网孔电流的编写和方向的选取如图所示。

$$
\boldsymbol{B}=\begin{array}{c}
\\ l_1\\ l_2\\ l_3\\ l_4
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$



题 15 — 9 图



题解 15 — 9 图

支路电阻矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}=[-\dot{U}_{\mathrm{S1}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dot{I}_{\mathrm{S7}}]^{\mathrm{T}}$$

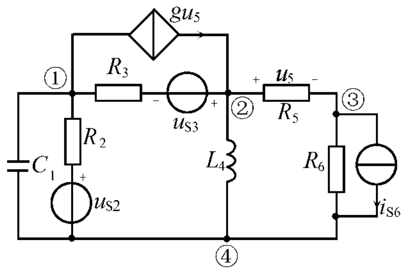
将以上各矩阵代入 $\boldsymbol{BRB}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{I}}_l=\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{BR}\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}$ 中，可得出网孔电流方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_3 \\ 0 & -(r+R_4) & R_4+R_5+R_6 & r-R_5 \\ 0 & -R_3 & -R_5 & R_3+R_5+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_{l1} \\ \dot{I}_{l2} \\ \dot{I}_{l3} \\ \dot{I}_{l4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dot{U}_{\mathrm{S1}} \\ 0 \\ 0 \\ -R_7\dot{I}_{\mathrm{S7}} \end{bmatrix}$$

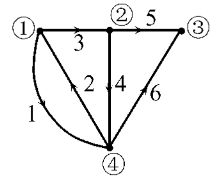
○ 15 — 10　题 15 — 10 图所示电路中电源角频率为 ω，试以结点 ④ 为参考结点，列写出该电路结点电压方程的矩阵形式。

解　电路的有向图如题解 15 — 10 图所示，选结点 ④ 为参考点，其关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\end{array}$$



题 15－10 图



题解 15－10 图

支路运算导纳矩阵为

$$
\boldsymbol{Y}(s)=\begin{bmatrix} sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{sL_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{R_6} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}(s)=[0\ \ -U_{\mathrm{S2}}(s)\ \ U_{\mathrm{S3}}(s)\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}(s)=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -I_{\mathrm{S6}}(s)]^{\mathrm{T}}
$$

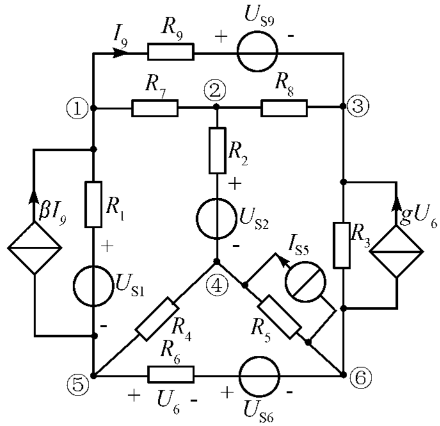
将以上各矩阵代入式 $\boldsymbol{AY}(s)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{n}}(s)=\boldsymbol{AI}_{\mathrm{S}}(s)-\boldsymbol{AYU}_{\mathrm{S}}(s)$ 中，便得到结点电压方程的矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} sC_1+\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_3} & g-\dfrac{1}{R_3} & -g \\ -\dfrac{1}{R_3} & \dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{sL_4}+\dfrac{1}{R_5}-g & g-\dfrac{1}{R_5} \\ 0 & -\dfrac{1}{R_5} & \dfrac{1}{R_5}+\dfrac{1}{R_6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{\mathrm{n1}}(s) \\ U_{\mathrm{n2}}(s) \\ U_{\mathrm{n3}}(s) \end{bmatrix}
$$

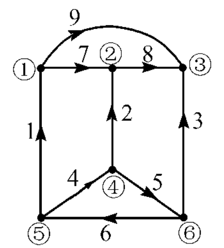
$$
=\begin{bmatrix} \dfrac{U_{\mathrm{S2}}(s)}{R_2}-\dfrac{U_{\mathrm{S3}}(s)}{R_3} \\ \dfrac{U_{\mathrm{S3}}(s)}{R_3} \\ -I_{\mathrm{S6}}(\mathrm{s}) \end{bmatrix}
$$

○ 15－11　试以结点⑥为参考结点，列出题 15－11 图所示电路的矩阵形式的结点电

压方程。



题 15－11 图



题解 15－11 图

解　电路有向图如题解 15－11 图所示，选结点 ⑥ 为参考点，其关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

又含受控源的支路为

$$I_1=\frac{1}{R_1}(U_1+U_{S1})+\beta I_9=G_1(U_1+U_{S1})+\beta G_9(U_9-U_{S9})$$

$$I_3=\frac{1}{R_3}U_3+gU_6=\frac{1}{R_3}U_3+g(-U_{S6}-U_6)=G_3U_3-g(U_6+U_{S6})$$

所以，支路电导矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G_9 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_9 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}=[\dot{U}_{\mathrm{S1}}\quad \dot{U}_{\mathrm{S2}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dot{U}_{\mathrm{S6}}\quad 0\quad 0\quad -\dot{U}_{\mathrm{S9}}]^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad \dot{I}_{\mathrm{S5}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

将以上各矩阵代入式 $\boldsymbol{AGA}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{AG}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}$ 中，则可得到该电路结点电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_7+G_9-\beta G_9 & -G_7 & -G_9+\beta G_9 & 0 & -G_1 \\ -G_7 & G_2+G_7+G_8 & -G_8 & -G_2 & 0 \\ -G_9 & -G_8 & G_3+G_8+G_9 & 0 & -g \\ 0 & -G_2 & 0 & G_2+G_4+G_5 & -G_4 \\ -G_1+\beta G_9 & 0 & -\beta G_9 & -G_4 & G_1+G_4+G_6 \end{bmatrix}$$

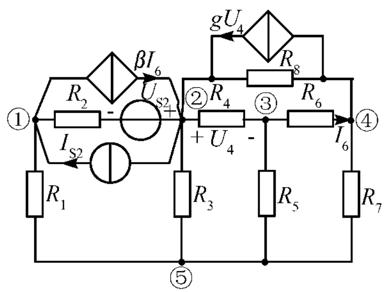
$$\cdot\begin{bmatrix} \dot{U}_{\mathrm{n1}} \\ \dot{U}_{\mathrm{n2}} \\ \dot{U}_{n3} \\ \dot{U}_{\mathrm{n4}} \\ \dot{U}_{n5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_1\dot{U}_{\mathrm{S1}}+G_9\dot{U}_{s9}-\beta G_9\dot{U}_{\mathrm{S9}} \\ G_2\dot{U}_{\mathrm{S2}} \\ -g\dot{U}_{\mathrm{S6}}-G_9\dot{U}_{\mathrm{S9}} \\ \dot{I}_{\mathrm{S5}}-G_2\dot{U}_{\mathrm{S2}} \\ -G_1\dot{U}_{\mathrm{S1}}+G_6\dot{U}_{\mathrm{S6}}+\beta G_9\dot{U}_{\mathrm{S9}} \end{bmatrix}$$

● 15－12 **对题 15－12 图所示电路，选结点 ⑤ 为参考结点，列出该电路矩阵形式的结点电压方程。**

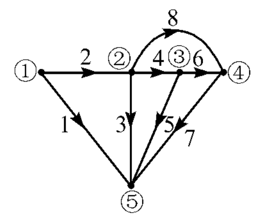
分析 **先写出关联矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后根据 $\boldsymbol{AGA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{AI}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{AGU}_{\mathrm{S}}$ 求解即可。**

解 **电路的有向图如题解 15－12 图所示，且选结点 ⑤ 为参考点，则关联矩阵为**

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



题 15－12 图



题解 15－12 图

含受控源支路的支路方程为

$$I_2=\frac{1}{R_2}(U_2+U_{S2})+\beta I_6-I_{S2}=G_2(U_2+U_{S2})+\beta G_6U_6-I_{S2}$$

$$I_8=\frac{1}{R_8}U_8-gU_4=G_8U_8-gU_4$$

支路电导矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & \beta G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & G_8 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_S=[0\quad \dot{U}_{S2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_S=[0\quad \dot{I}_{S2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

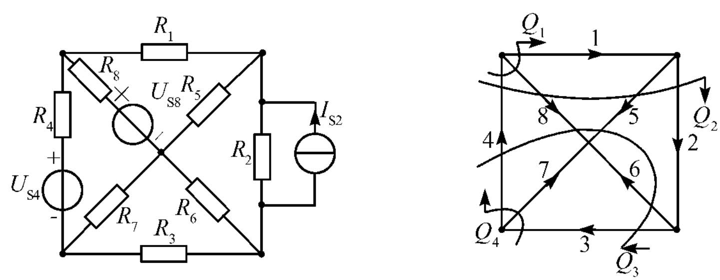
将以上各式代入到式 $\boldsymbol{AGA}^T\dot{\boldsymbol{U}}_n=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{I}}_S-\boldsymbol{AG}\dot{\boldsymbol{U}}_S$ 中，则可得到该电路结点电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & \beta G_6 & -\beta G_6 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4+G_8-g & g-G_4-\beta G_6 & \beta G_6-G_8 \\ 0 & -G_4 & G_4+G_5+G_6 & -G_6 \\ 0 & g-G_8 & -g-G_6 & G_6+G_7+G_8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \\ \dot{U}_{n3} \\ \dot{U}_{n4} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{S2}-G_2\dot{U}_{S2} \\ -\dot{I}_{S2}+G_2\dot{U}_{S2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

小结 含受控源支路的支路方程要特别对待。

◎ 15—13 **电路如题 15—13 图(a)所示,图(b)为其有向图,选支路 1、2、6、7 为树,列出矩阵形式的割集电压方程。**



(a) (b)

题 15—13 图

分析 选出合适的树,列写基本割集矩阵,再根据 $\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_f^{T}\boldsymbol{U}_t=\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{I}_S-\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}_S$ 求解即可。

解 如题 15—13 图(b)所示有向图中,选树(1,2,6,7),则单树支割集组为:Q_1(1,4,8),Q_2(2,4,5,8),Q_3(6,3,4,5,8),Q_4(7,3,4)则基本割集矩阵为

$$\boldsymbol{Q}_f=\begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

支路电导矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{diag}[G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6,G_7,G_8]$$

其中 $G_k=\dfrac{1}{R_k},k=1,2,\cdots,8$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}=[0\quad 0\quad 0\quad \dot{U}_{\mathrm{S4}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad -\dot{U}_{\mathrm{S8}}]^{\mathrm{T}}$$

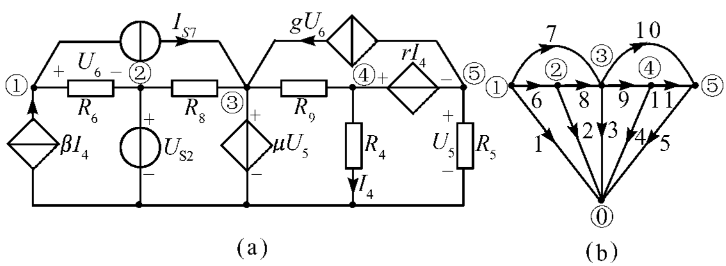
$$\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}=[0\quad \dot{I}_{\mathrm{S2}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

将以上各矩阵代入到式 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}$ 中，则可得到该电路割集电压方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} G_1+G_4+G_8 & G_4+G_8 & G_4+G_8 & -G_4 \\ G_4+G_8 & G_2+G_4+G_5+G_8 & G_4+G_5+G_8 & -G_4 \\ G_4+G_8 & G_4+G_5+G_8 & G_3+G_4+G_5+G_6+G_8 & -(G_3+G_4) \\ -G_4 & -G_4 & -(G_3+G_4) & G_3+G_4+G_7 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{\mathrm{t1}} \\ \dot{U}_{\mathrm{t2}} \\ \dot{U}_{\mathrm{t3}} \\ \dot{U}_{\mathrm{t4}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_4\dot{U}_{\mathrm{S4}}+G_8\dot{U}_{\mathrm{S8}} \\ \dot{I}_{\mathrm{S2}}+G_2\dot{U}_{\mathrm{S4}}+G_8\dot{U}_{\mathrm{S8}} \\ G_4\dot{U}_{\mathrm{S4}}+G_8\dot{U}_{\mathrm{S8}} \\ -G_4\dot{U}_{\mathrm{S4}} \end{bmatrix}$$

○ 15－14　电路如题 15－14 图(a) 所示，图(b) 为其有向图。试写出结点列表法中支路方程的矩阵形式。



题 15－14 图

解　结点列表方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{1}_{\mathrm{b}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\mathrm{n}} \\ \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}$$

其中

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

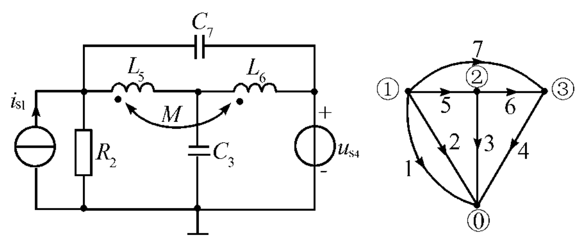
而 $\boldsymbol{F}$ 和 H 满足 $\boldsymbol{FU} + \boldsymbol{HI} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}$，由题 15－14 图($a$) 的支路方向，可得

$$
\boldsymbol{F} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 10 \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 5 & & & & & & \\
0 & & & & \vdots & & & & & & \\
 & 1 & & & \vdots & & & & & & \\
\cdots & \cdots & 1 & & -\mu & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \mathbf{0} & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g & & & & 0 & \\
 & & & & & \vdots & & & & & 1 \\
 & & & & & 6 & & & & &
\end{array}\right]
$$

$$
\boldsymbol{H}=\begin{array}{r}1\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ 11\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & 4 & & & & & & & \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & \beta & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & \\
 & & & -R_4 & & & & & \mathbf{0} & & \\
 & & & & -R_5 & & & & & & \\
 & & & & & -R_6 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & \mathbf{0} & & & & & & -R_8 & & & \\
 & & & & & & & & -R_9 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & -r & & & & & & & 0
\end{array}\right]\\
\begin{array}{ccccccccccc} & & & 4 & & & & & & & \end{array}
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{S}}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{S}}=\begin{bmatrix}0 & U_{\mathrm{S}2} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\mathrm{s}7} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

◎ 15－15　**电路如题 15－15 图(a)所示，图(b)为其有向图。写出结点列表方程的矩阵形式。**



(a)　　　(b)

题 15－15 图

分析　根据结点列表方程的基本矩阵形式列写结点列表方程即可。

解　结点列表方程的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{A}^{T} & \mathbf{1}_b & 0\\ 0 & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{n}}\\ \dot{\boldsymbol{U}}\\ \dot{\boldsymbol{I}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{S}}+\dot{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{S}}\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\ ①\\ ②\\ ③\end{array}\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\ 1&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&0&1&0&-1&-1\end{bmatrix}$$

而 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足 $\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{I}}=\dot{\boldsymbol{U}}_S+\dot{\boldsymbol{I}}_S$，由图 15—36(a) 所示 电路，根据图 15—36(b) 的支路方向可得

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0&&&&&&\\&1&&&&\boldsymbol{0}&\\&&-j\omega C_3&&&&\\&&&1&&&\\&\boldsymbol{0}&&&1&&\\&&&&&1&\\&&&&&&-j\omega C_7\end{bmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&-R_2&&&&\boldsymbol{0}&\\&&1&&&&\\&&&0&&&\\&\boldsymbol{0}&&&-j\omega L_5&-j\omega M&\\&&&&-j\omega M_5&-j\omega L_6&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

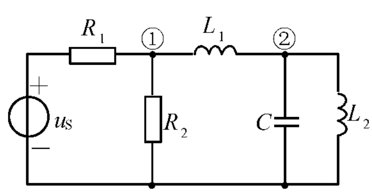
$$\dot{\boldsymbol{U}}_S+\dot{\boldsymbol{I}}_S=[-\dot{I}_{S1}\quad 0\quad 0\quad \dot{U}_{S4}\quad 0\quad 0\quad 0]^T$$

○15—16　略

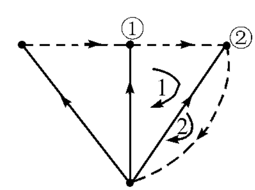
●15—17　列出题 15—17 图所示电路的状态方程。若选结点 ① 和 ② 的结点电压为输出量，写出输出方程。

分析　根据 KCL、KVL 列写各微分方程，确定状态变量，即可列状态方程。

解　电路的有向图如题解 15—17 图所示。选特有树如图中实线所示 。



题 15—17 图



题解 15—17 图

特有树：指树支包含了电路中所有电压源支路和电容支路，它的连支包含了电路中所有电流源支路和电感支路。

对只含有树支的结点 ② 列出 KCL 方程：

$$C\frac{du_C}{dt}=i_{L2}-i_{L1}\qquad ①$$

对由电路 L_1 和 L_2 连支所确定的基本回路 1 和 2 列 KVL 方程

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_{L_1}}{\mathrm{d}t}=u_C-u_{R2} \qquad ②$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L_2}}{\mathrm{d}t}=-u_C \qquad ③$$

消去非状态量 u_{R2}，$u_{R2}=R_2(i_{L1}-i_{R1})$，**而** $i_{R1}=\dfrac{1}{R_1}(u_S-u_{R2})$

经整理，得
$$u_{R2}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_{L1}-\frac{R_2}{R_1+R_2}u_S$$

将 u_{R2} **代入式** ②**，并整理得到该电路的状态方程为**

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{C}i_{L1}+\frac{1}{C}i_{L2}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L_1}u_C-\frac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)}i_{L1}+\frac{R_2}{L_1(R_1+R_2)}u_S$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{L_2}u_C$$

若写成矩阵形式则为：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bv}$ **其中**

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{C} & \dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1R_2}{L_1(R_1+R_2)} & 0\\ -\dfrac{1}{L_2} & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{R_2}{L_1(R_1+R_2)}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=[u_C\quad i_{L1}\quad i_{L2}]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{v}=[u_S(t)]$$

若选结点 ① **和** ② **的结点电压为输出量，则**

$$u_{n1}=-u_{R2}=-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_{L1}+\frac{R_2}{R_1+R_2}u_S$$

$$u_{n2}=-u_C$$

若写成矩阵形式，则为：$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Dv}$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2} & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}u_{n1}\\ u_{n2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=[u_S(t)]$$

小结　**一般情况下选取** u_C **和** i_L **为状态量。**

○15－18　**略**

第十六章

二端口网络

学习要求

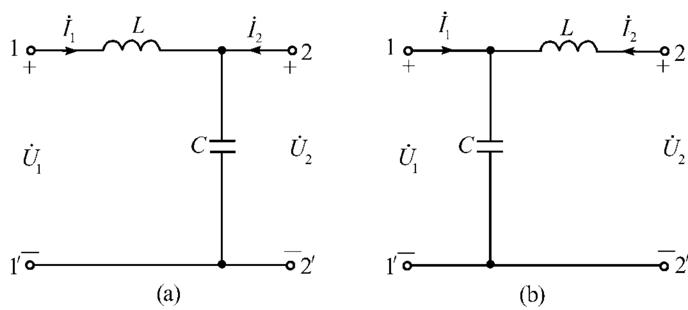
1. 了解二端口网络的定义及应满足的条件(端口条件)。
2. 深刻理解二端口网络方程与参数的物理意义,会用多种方法求解二端口网络的参数,并能写出网络方程。
3. 了解二端口网络等效网络的定义与条件,能画出Z,Y,H参数的等效网络,并会应用。
4. 深刻理解二端口网络函数的定义,并会用一种参数(例如传输参数)表示网络函数。
5. 了解二端口网络的连结方式及其参数的计算公式。
6. 了解回转器、负阻抗变换器的定义、端口伏安关系、性质及其应用。
7. 对有载二端口网络会进行分析计算(电压、电流、功率、最大功率、瞬态过程等)。

知识网络图

二端口网络
- 二端口网络
  - 定义
  - 网络端口特性方程和参数
  - 等效网络
  - 网络函数
  - 连接方式
  - 分析计算
- 回转器
- 负阻抗变换器

课后习题全解

○16－1　求题 16－1 图所示二端口的 Y、Z 和 T 参数矩阵。



题 16－1 图

解　(1) 对图(a)所示电路，标出端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及其参考方向，由 KVL，KCL 和元件 VCR，得

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{j\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = -j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_1 + j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{j\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + j\omega C\dot{U}_2 = j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_1 + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\dot{U}_2$$

所以，Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} -j\dfrac{1}{\omega L} & j\dfrac{1}{\omega L} \\ j\dfrac{1}{\omega L} & j(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}) \end{bmatrix}$$

同理可得

$$\dot{U}_1 = j\omega L\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2$$

得出 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

根据 KCL，KVL 和元件 VCR，可得出端口 $1-1'$ 处电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 为

$$\dot{U}_1 = j\omega L\dot{I}_1 + \dot{U}_2 \quad ①$$

$$\dot{I}_1 = j\omega C\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \quad ②$$

将 ② 代入式 ① 中，得

$$\dot{U}_1 = j\omega L(j\omega C\dot{U}_2 - \dot{I}_2) + \dot{U}_2 = (1-\omega^2 LC)\dot{U}_2 - j\omega L\dot{I}_2 \quad ③$$

将方程式 ③ 与式 ② 联立可得 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1-\omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

以上 Z 和 T 参数矩阵还可以利用它们与 Y 参数之间的关系求得。

(2) 对图(b) 所示电路，指定端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及参考方向，由 KCL，KVL 和元件 VCR，得

$$\dot{I}_1 = j\omega C\dot{U}_1 + \frac{1}{j\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\dot{U}_1 + j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{j\omega L}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_1 - j\frac{1}{\omega L}\dot{U}_2$$

所以，Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) & j\frac{1}{\omega L} \\ j\frac{1}{\omega L} & -j\frac{1}{\omega L} \end{bmatrix}$$

同理，可得 Z 参数方程

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L\ \dot{I}_2 + \frac{1}{j\omega C}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) = \frac{1}{j\ \omega C}\dot{I}_1 + j\ (\omega L - \frac{1}{\omega C})\dot{I}_2$$

故，Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})\end{bmatrix}$$

又因为端口 $1-1'$ 处的电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 为

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2-\mathrm{j}\omega L\dot{I}_2 \tag{①}$$

$$\dot{I}_1=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_1-\dot{I}_2 \tag{②}$$

将式①代入到式②中，得

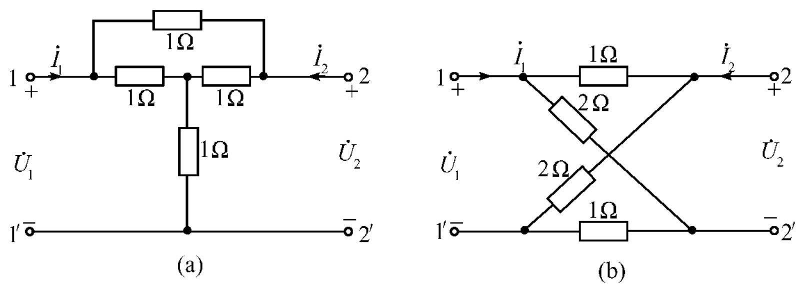
$$\dot{I}_1=\mathrm{j}\omega C(\dot{U}_2-\mathrm{j}\omega L\dot{I}_2)-\dot{I}_2=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_2-(1-\omega^2LC)\dot{I}_2$$

③

将方程式①与式③联立，可得出 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{j}\omega L\\ \mathrm{j}\omega C & 1-\omega^2LC\end{bmatrix}$$

◎ 16－2　求题 16－2 图所示二端口 Y 和 Z 参数矩阵。



题 16－2 图

分析　根据 Y、Z 参数的定义求解即可。

解　(1) 对题 16－2 图(a) 电路，其端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及参考方向如图所示，求它的 Y_{11} 和 Y_{21} 时，把端口 $2-2'$ 短路，在端口 $1-1'$ 处施加电压 $\dot{U}_1$ 则可求得

$$\dot{I}_1=\dot{U}_1+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)\dot{U}_1=\frac{5}{3}\dot{U}_1$$

$$-\dot{I}_2=\dot{U}_1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\dot{U}_1\right)=\frac{4}{3}\dot{U}_1$$

根据定义可求得 Y_{11} 和 Y_{21} 为

$$Y_{11}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=\frac{5}{3}\mathrm{S},\qquad Y_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\bigg|_{\dot{U}_2=0}=-\frac{4}{3}\mathrm{S}$$

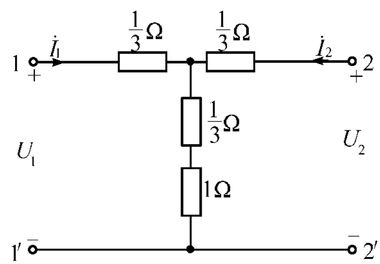
由对称性和互易性分别可得出

$$Y_{22}=Y_{11}=\frac{5}{3}\mathrm{S},\qquad Y_{12}=Y_{21}=-\frac{4}{3}\mathrm{S}$$

所以,Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

对图(a)电路先进行 △—Y 电阻等效变换,如题解 16－2 图所示,其端口电压 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 为



题解 16－2 图

$$\dot{U}_1=\frac{1}{3}\dot{I}_1+(\frac{1}{3}+1)(\dot{I}_1+\dot{I}_2)=\frac{5}{3}\dot{I}_1+\frac{4}{3}\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2=\frac{1}{3}\dot{I}_2+(\frac{1}{3}+1)(\dot{I}_1+\dot{I}_2)=\frac{4}{3}\dot{I}_1+\frac{5}{3}\dot{I}_2$$

该电路 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}\Omega$$

(2) 对题 16－2 图(b) 电路,设端口电压 $\dot{U}_1$,$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$,$\dot{I}_2$ 及其参考方向如图示,在求 Y_{11} 和 Y_{21} 时,把端口 2—2′ 短路,即 $\dot{U}_2=0$,在端口 1—1′ 处施加电压 $\dot{U}_1$,则可求得

$$\dot{I}_1=\frac{1}{\frac{2}{1+2}+\frac{2}{1+2}}\dot{U}_1=\frac{3}{4}\dot{U}_1$$

$$-\dot{I}_2=\frac{2}{1+2}\dot{I}_1-\frac{1}{2+1}\dot{I}_1=\frac{1}{3}\dot{I}_1=\frac{1}{4}\dot{U}_1$$

根据定义可求得 Y_{11} 和 Y_{21} 为

$$Y_{11}=\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\mid_{\dot{U}_2=0}=\frac{3}{4}\text{ S},\qquad Y_{21}=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\mid_{\dot{U}_2=0}=-\frac{1}{4}\text{ S}$$

由该电路的对称性和互易性可得出

$$Y_{22}=Y_{11}=\frac{3}{4}\text{S},\qquad Y_{12}=Y_{21}=-\frac{1}{4}\text{ S}$$

所以,Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\text{S}$$

同理,在求 Z 参数中的 Z_{11} 和 Z_{21} 时,把端口 $2—2'$ 开路,即 $\dot{I}_2=0$,在端口 $1—1'$ 处施加电流 $\dot{I}_1$,则可求得

$$\dot{U}_1=(3\,/\!/\,3)\,\dot{I}_1=\frac{3}{2}\,\dot{I}_1$$

$$\dot{U}_2=\frac{2}{1+2}\,\dot{U}_1-\frac{1}{2+1}\,\dot{U}_1=\frac{1}{3}\,\dot{U}_1=\frac{1}{2}\,\dot{I}_1$$

根据定义可求得 Z_{11} 和 Z_{21} 为

$$Z_{11}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{3}{2}\Omega,\quad Z_{21}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{1}{2}\Omega$$

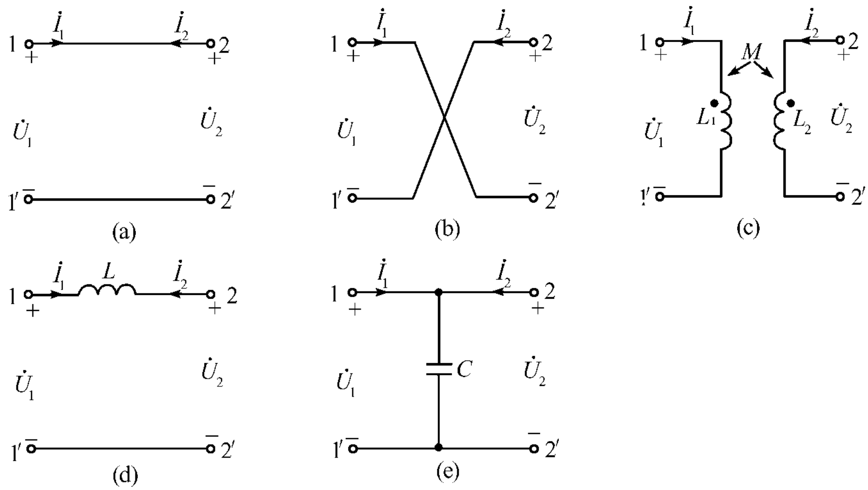
由于该电路是对称和互易的,则分别可得出

$$Z_{22}=Z_{11}=\frac{3}{2}\Omega,\qquad Z_{12}=Z_{21}=\frac{1}{2}\Omega$$

故可写出 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\Omega$$

○ 16－3　求题 16－3 图所示二端口的 T 参数矩阵。



题 16－3 图

解 对题 16－3 图中的五个二端口电路，标出它们的端口电压 $\dot{U}_1$，$\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_1$，$\dot{I}_2$ 及其参考方向。

(1) 对图(a) 电路，满足方程

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2, \qquad \dot{I}_1 = -\dot{I}_2$$

所以，T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 对图(b) 电路，有 T 参数方程

$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_2, \qquad \dot{I}_1 = \dot{I}_2$$

故可得 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) 图(c) 电路为耦合电感，其端口电压电流满足方程

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \quad ①$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 \quad ②$$

由方程式 ② 得

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega M}\dot{U}_2 - \frac{L_2}{M}\dot{I}_2 \quad ③$$

将式 ③ 代入到式 ① 中，可得

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega M}\dot{U}_2 - \frac{L_2}{M}\dot{I}_2\right) + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 = \frac{L_1}{M}\dot{U}_2 - \mathrm{j}\omega\frac{L_1L_2 - M^2}{M}\dot{I}_2 \quad ④$$

方程式④和式③，即为 T 参数方程，所以，耦合电感的 T 参数矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}\dfrac{L_1}{M} & \mathrm{j}\omega\dfrac{L_1L_2-M^2}{M}\\ -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega M} & \dfrac{L_2}{M}\end{bmatrix}$$

(4) 对图(d)电路，其 T 参数方程为

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2-\mathrm{j}\omega L\dot{I}_2,\quad \dot{I}_1=-\dot{I}_2$$

故 T 参数矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{j}\omega L\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

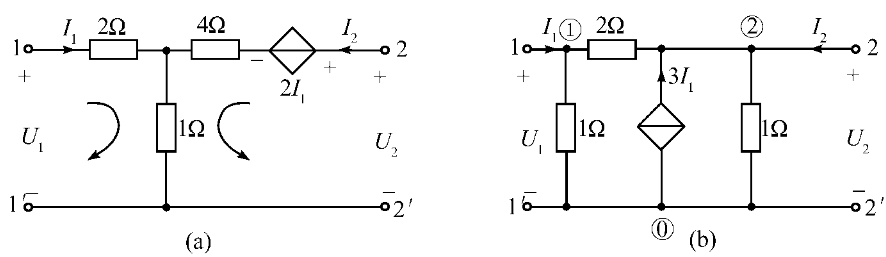
(5) 对图(e)电路，其 T 参数方程为

$$\dot{U}_1=\dot{U}_2,\quad \dot{I}_1=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_2-\dot{I}_2$$

所以，T 参数矩阵为

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \mathrm{j}\omega C & 1\end{bmatrix}$$

● 16－4　求题 16－4 图所示二端口的 Y 参数矩阵。



题 16－4 图

分析　可根据网孔电流法列写出方程，求出 Z 参数矩阵，由 Z 参数矩阵同 Y 参数矩阵的关系求解即可。

解　(1) 对图(a)电路，根据指定的端口电压 U_1,U_2 和电流 I_1,I_2 及参考方向，应用网孔电流法，有

$$U_1=(2+1)I_1+I_2=3I_1+I_2$$
$$U_2=2I_1+(4+1)I_2+I_1=3I_1+5I_2$$

所以，Z 参数矩阵为

$$Z=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\Omega$$

由 Y 参数与 Z 参数之间的关系，可得 Y 参数矩阵

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{12} & -\frac{1}{12}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

(2) 对图(b) 电路，根据图中的端口电压 U_1，U_2 和电流 I_1，I_2 及参考方向，应用结点电压法，有

$$I_1=(1+\frac{1}{2})U_1-\frac{1}{2}U_2=\frac{3}{2}U_1-\frac{1}{2}U_2 \qquad ①$$

$$I_2=-\frac{1}{2}U_1+(\frac{1}{2}+1)U_2-3I_1=-\frac{1}{2}U_1+\frac{3}{2}U_2-3I_1 \qquad ②$$

将式 ① 代入到式 ② 中，消去 I_1，得

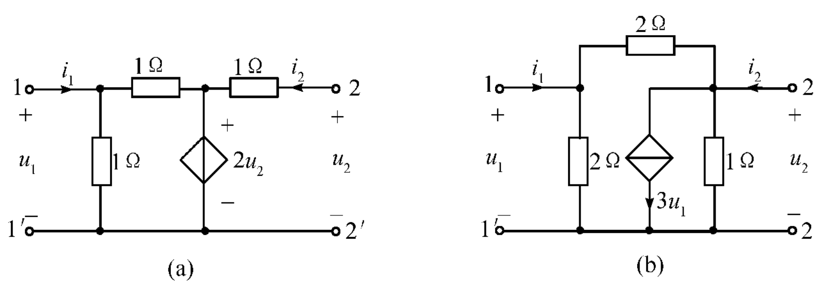
$$I_2=-5U_1+3U_2 \qquad ③$$

将式 ① 与式 ③ 联立，即为 Y 参数方程，可写出 Y 参数矩阵

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -5 & 3\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

小结　求解各个参数矩阵时，先求出最易求解的参数矩阵，然后根据各变换关系依次求解。

○ 16－5　求题 16－5 图所示二端口的混合参数(H) 矩阵。



题 16－5 图

解　(1) 对图(a) 电路，指定端口电压 u_1，u_2 和电流 i_1，i_2 及其参考方向。由 KCL，KVL 和元件 VCR，可得

$$u_1=(i_1-u_1)+2u_2$$

经整理，则有

$$u_1=\frac{1}{2}i_1+u_2$$

而

$$i_2=u_2-2u_2=-u_2$$

故可得出 H 参数矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

(2) 对图(b) 电路,指定端口电压和电流及参考方向,应用结点电压法,有

$$i_1=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})u_1-\frac{1}{2}u_2$$

则有

$$u_1=i_1+\frac{1}{2}u_2 \qquad ①$$

而

$$i_2=-\frac{1}{2}u_1+(\frac{1}{2}+1)u_2+3u_1=\frac{5}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2 \qquad ②$$

将式 ① 代入到式 ② 中,得

$$i_2=\frac{5}{2}i_1+\frac{11}{4}u_2 \qquad ③$$

联立式 ① 与式 ③,即得 H 参数方程,所以,可写出 H 参数矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{11}{4}\end{bmatrix}$$

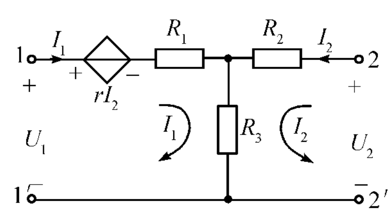
○ 16－6　已知题 16－6 图所示二端口的 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}10 & 8\\ 5 & 10\end{bmatrix}\Omega$$

求 R_1,R_2,R_3 和 r 的值。

解　题 16－6 图所示电路中,标出端口电压 U_1,U_2 和电流 I_1,I_2 及其参考方向,应用网孔电流法,有

$$\begin{aligned}U_1&=(R_1+R_3)I_1+R_3I_2+rI_2\\&=(R_1+R_3)I_1+(R_3+r)I_2\\U_2&=R_3I_1+(R_2+R_3)I_2\end{aligned}$$



题 16－6 图

所以,其 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}R_1+R_3 & R_3+r\\ R_3 & R_2+R_3\end{bmatrix}$$

将它与已知的 Z 参数矩阵比较,可得各元件参数值为

$$R_3=5\Omega,\quad r=3\Omega$$
$$R_2=5\Omega,\quad R_1=5\Omega$$

○ 16－7 已知二端口的 Y 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1.5 & -1.2\\ -1.2 & 1.8\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

求 H 参数矩阵，并说明该二端口中是否有受控源。

解 因为 Y 参数方程为

$$I_1=Y_{11}U_1+Y_{12}U_2 \quad ①$$

$$I_2=Y_{21}U_1+Y_{22}U_2 \quad ②$$

若 $Y_{11}\neq 0$，由式 ① 可得

$$U_1=\frac{1}{Y_{11}}I_1-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}U_2 \quad ③$$

将式 ③ 代入到式 ② 中，得

$$I_2=\frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_1+\frac{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}}U_2 \quad ④$$

以上式 ③ 与式 ④ 即为 H 参数方程，对照 H 参数方程的标准式，可得

$$H_{11}=\frac{1}{Y_{11}},\quad H_{12}=-\frac{Y_{12}}{Y_{11}}$$

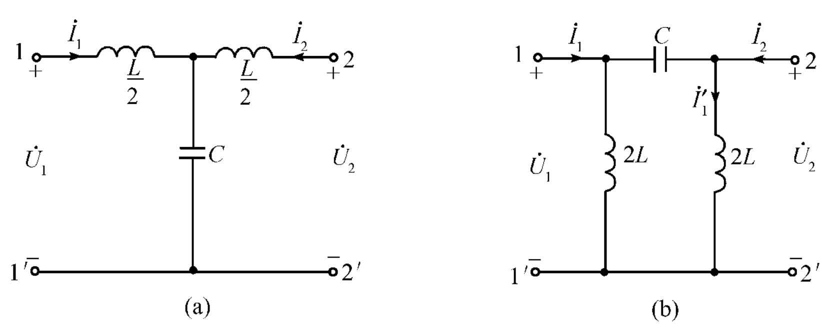
$$H_{21}=\frac{Y_{21}}{Y_{11}},\quad H_{22}=\frac{Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}}{Y_{11}}$$

将已知的 Y 参数代入到以上各式中，可得出 H 参数矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}0.667 & 0.8\\ -0.8 & 0.84\end{bmatrix}$$

由于 Y 参数矩阵中的 $Y_{12}=Y_{21}=-1.2\mathrm{S}$，说明该二端口互易性，所以，该二端口网络中不含有受控源。

○ 16－8 求题 16－8 图所示二端口的 Z 参数、T 参数。



题 16－8 图

解 (1) 对图(a) 电路，指定端口电压 $\dot U_1$，$\dot U_2$ 和电流 $\dot I_1$，$\dot I_2$ 及其参考方向，在求 Z_{11}

和 Z_{21} 时，令 $\dot{I}_2=0$，在端口 $1—1'$ 处施加电流 $\dot{I}_1$，则可求得

$$Z_{11}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\mathrm{j}\omega\frac{L}{2}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=\mathrm{j}(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C})$$

$$Z_{21}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

由于电路具有对称性和互易性，所以，有

$$Z_{22}=Z_{11}=\mathrm{j}(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}),\qquad Z_{12}=Z_{21}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

故，其 Z 参数矩阵为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C}) & -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\\ -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} & \mathrm{j}(\frac{\omega L}{2}-\frac{1}{\omega C})\end{bmatrix}$$

根据 T 参数与 Z 参数之间的关系，可得

$$A=D=\frac{Z_{11}}{Z_{21}}=\frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{2}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=1-\frac{\omega^2LC}{2}$$

$$B=\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}=\frac{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}=\mathrm{j}\omega L(1-\frac{\omega^2LC}{4})$$

$$C=\frac{1}{Z_{21}}=\mathrm{j}\omega C$$

所以，T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1-\frac{\omega^2LC}{2} & \mathrm{j}\omega L(1-\frac{\omega^2LC}{4})\\ \mathrm{j}\omega C & 1-\frac{\omega^2LC}{2}\end{bmatrix}$$

(2) 对图(b) 电路，标出其端口电压和电流及其参考方向。由于该电路也具有对称性和互易性，所以，有：$Z_{22}=Z_{11}$ 和 $Z_{12}=Z_{21}$，在求 Z_{11} 和 Z_{21} 时，令 $\dot{U}_2=0$，在端口 $1—1'$ 处施加电流 $\dot{U}_1$，由定义可求得

$$Z_{22}=Z_{11}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{(\mathrm{j}2\omega L)(\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C})}{\mathrm{j}2\omega L+\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{\mathrm{j}2\omega L(1-2\omega^2LC)}{1-4\omega^2LC}$$

$$Z_{12}=Z_{21}=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\bigg|_{\dot{I}_2=0}=\frac{\mathrm{j}2\omega LI'_1}{\dot{I}_1}=\frac{\mathrm{j}2\omega L}{\dot{I}_1}\times\frac{\mathrm{j}2\omega L}{\mathrm{j}2\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}+\mathrm{j}2\omega L}\dot{I}_1$$

$$= -\mathrm{j}\,\frac{4\omega^3L^2C}{1-4\omega^2LC}$$

同理，根据 T 参数和 Z 参数之间的关系，可求得

$$A = D = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}2\omega L(1-2\omega^2LC)}{1-4\omega^2LC}}{-\mathrm{j}\,\dfrac{4\omega^3L^2C}{1-4\omega^2LC}} = \frac{2\omega L(1-2\omega^2LC)}{-4\omega^3L^2C} = 1-\frac{1}{2\omega^2LC}$$

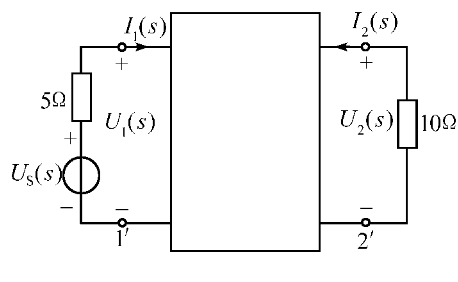
$$B = \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} = \frac{Z_{11}^2-Z_{21}^2}{Z_{21}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}$$

$$C = \frac{1}{Z_{21}} = \frac{1-4\omega^2LC}{-\mathrm{j}4\omega^3L^2C} = \mathrm{j}\,\frac{1-4\omega^2LC}{4\omega^3L^2C}$$

◎ 16—9　电路如题 16—9 图所示，已知二端口的 H 参数矩阵为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 40 & 0.4 \\ 10 & 0.1 \end{bmatrix}$$

求电压转移函数 $U_2(s)/U_S(s)$。



题 16—9 图

分析　根据 H 参数矩阵列写各电压、电流关系方程式，再联立端口所接外电路方程求解即可。

解　题 16—9 图所示电路中，标出端口电压 $U_1(s)$ 及参考方向。由已知的 H 参数矩阵，可写出其对应方程式

$$U_1(s) = 40I_1(s) + 0.4U_2(s) \tag{①}$$

$$I_2(s) = 10I_1(s) + 0.1U_2(s) \tag{②}$$

端口所接外电路满足方程

$$U_1(s) = U_S(s) - 5I_1(s) \tag{③}$$

$$I_2(s) = -\frac{1}{10}U_2(s) \tag{④}$$

将以上式 ③ 和式 ④ 分别代入到式 ① 和式 ② 中，整理后得

$$45I_1(s) + 0.4U_2(s) = U_S(s)$$

$$10I_1(s) + 0.2U_2(s) = 0$$

在以上两式中，消去电流 $I_1(s)$，可得电压转移函数

$$\frac{U_2(s)}{U_S(s)} = \frac{1}{-0.5} = -2$$

○ 16—10　已知二端口参数矩阵为

(a)　$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 60/9 & 40/9 \\ 40/9 & 100/9 \end{bmatrix}\Omega$；　　(b) $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ S。

试问该二端口是否有受控源，并求它的等效 Π 型电路。

解　(a) 由 Z 参数矩阵知：$Z_{12}=Z_{21}=\frac{40}{9}\Omega$，所以，该二端口中不含有受控源。根据 Z 参数矩阵可求得其 Y 参数矩阵

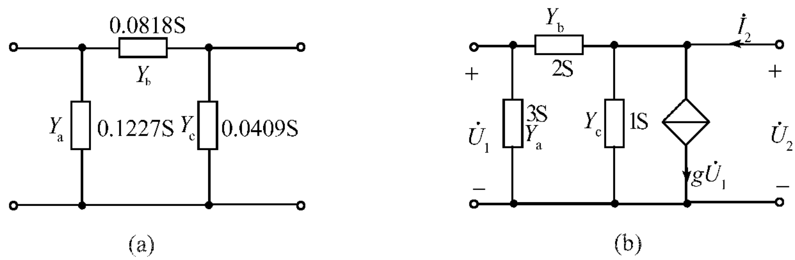
$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{Z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}\\ -\frac{Z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2045 & -0.0818\\ -0.0818 & 0.1227\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

则其等效 Π 形电路如题解 16－10 图(a) 所示，其中有

$$Y_a+Y_b=Y_{11}=0.2045\mathrm{S},\qquad Y_b=-Y_{12}=0.0818\mathrm{S}$$
$$Y_b+Y_c=Y_{22}=0.1227\mathrm{S}$$

解得

$$Y_a=0.1227\mathrm{S},\qquad Y_b=0.0818\mathrm{S},\qquad Y_c=0.0409\mathrm{S}$$



题解 16－10 图

(b) 由 Y 参数矩阵知：$Y_{12}\neq Y_{21}$，所以，该二端口中含有受控源，其等效 Π 形电路如题解 16－10 图(b) 所示。其 Y 参数方程为

$$\dot{I}_1=(Y_a+Y_b)\dot{U}_1-Y_b\dot{U}_2$$
$$\dot{I}_2=(-Y_b+g)\dot{U}_1+(Y_b+Y_c)\dot{U}_2$$

将以上两式的系数与已知 Y 参数矩阵比较，得

$$Y_a+Y_b=5\mathrm{S},\quad -Y_b=-2\mathrm{S},\quad -Y_b+g=0,\quad Y_b+Y_c=3\mathrm{S}$$

可解得

$$Y_b=2\mathrm{S},\quad Y_a=3\mathrm{S},\quad g=Y_b=2\mathrm{S},\quad Y_c=1\mathrm{S}$$

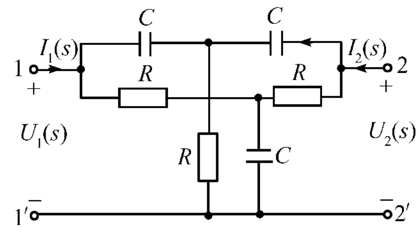
◎ 16－11　**求题 16－11 图所示双 T 电路的 Y 参数。**

分析　由电路图可知其具有对称性和互易性，再根据 Y 参数定义求解即可。

解　图示电路中，指定其端口电压和电流及其参考方向。由于该电路具有对称性和互易性，所以，有

$$Y_{22}=Y_{11}=\frac{I_1(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2(s)=0}=\frac{sC\left(s+\frac{1}{RC}\right)}{2\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}+\frac{s+\frac{1}{RC}}{R\left(s+\frac{2}{RC}\right)}$$

$$Y_{12}=Y_{21}=\frac{I_2(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2(s)=0}=-\left(\frac{s^2C}{2\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}+\frac{\frac{1}{R^2C}}{s+\frac{2}{RC}}\right)$$



题 16－11 图

○ 16－12　(1) $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} A & B \\ AY+C & BY+D \end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} A & AZ+B \\ C & CZ+D \end{bmatrix}$

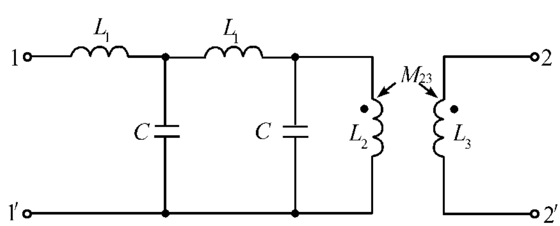
●16－13　利用题 16－1，16－3 的结果，求出题 16－13 图所示二端口的 T 参数矩阵。设已知 $\omega L_1=10\Omega$，$\frac{1}{\omega C}=20\Omega$，$\omega L_2=\omega L_3=8\Omega$，$\omega M_{23}=4\Omega$。

分析　图中所示二端口电路可看作三个二端口的级联，级联的 $\boldsymbol{T}$ 参数矩阵关系为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3$，根据公式求解即可。

解　题 16－13 图所示二端口电路可看作是三个二端口的级联，利用题 16－1 图(a)，题 16－3 图(c) 的 T 参数结果，可得出该二端口的 T 参数矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1-\omega^2L_1C & \mathrm{j}\omega L_1 \\ \mathrm{j}\omega C & 1 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \frac{L_2}{M} & \mathrm{j}\omega\frac{L_2L_3-M^2}{M} \\ -\mathrm{j}\frac{1}{\omega M} & \frac{L_3}{M} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-\frac{10}{20} & \mathrm{j}10 \\ \mathrm{j}\frac{1}{20} & 1 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \frac{8}{4} & \mathrm{j}\frac{8^2-4^2}{4} \\ -\mathrm{j}\frac{1}{4} & \frac{8}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.25 & \mathrm{j}27 \\ \mathrm{j}0.025 & 0.1 \end{bmatrix}$$

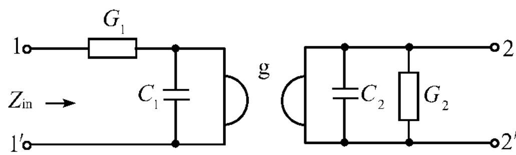


题 16－13 图

小结　级联的端口网络参数矩阵关系是解题的关键。

◯16－14　略

◯ 16－15　试求题 16－15 图所示电路的输入阻抗 Z_{in}。已知 $C_1 = C_2 = 1\text{F}$，$G_1 = G_2 = 1\text{S}$，$g = 2\text{S}$。



题 16－15 图

解　题 16－15 图所示电路中，当回转器输出端口接一导纳 $Y_2(s) = G_2 + sC_2$（端口 2—2′ 开路）时，根据回转器的 VCR，可得出从回转器输入端口看进去的输入导纳为

$$Y_1(s) = \frac{g^2}{Y_2(s)} = \frac{g^2}{G_2 + sC_2}$$

所以，该电路的阻抗 $Z_{in}(s)$ 为

$$\begin{aligned} Z_{in}(s) &= \frac{1}{G_1} + \frac{1}{sC_1 + Y_1(s)} \\ &= \frac{1}{G_1} + \frac{1}{sC_1 + \dfrac{g^2}{G_2 + sC_2}} \\ &= \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + s + 4} \end{aligned}$$

第十七章

非线性电路简介

学习要求

1. 了解非线性电阻、电容、电感的定义及其特性的描述与分类;了解静态电阻、电容、电感的意义与应用;了解动态电阻(电导)、电容、电感的意义与应用。
2. 会用图解法、小信号等效电路法、分段线性化法、数值计算:牛顿拉夫逊法,分析计算简单的非线性电阻电路。
3. 会用分段线性化法分析计算简单的非线性动态电路。

知识网络图

- 非线性电路简介
  - 非线性电路元件
    - 非线性电阻
    - 非线性电感
    - 非线性电容
  - 非线性电路分析方法
    - 小信号分析法
    - 分段线性化方法

课后习题全解

○ 17-1　**如果通过非线性电阻的电流为 $\cos(\omega t)$A,要使该电阻两端的电压中含有 4ω 角频率的电压分量,试求该电阻的伏安特性,写出其解析表达式。**

解　由题意知,非线性电阻中的电流为:

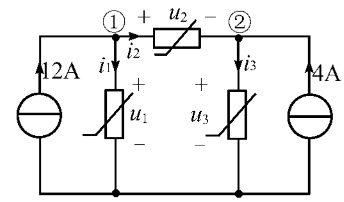
$$i = \cos(\omega t)\mathrm{A}$$

因为 $\cos(4\omega t) = 2\cos^2(2\omega t) - 1 = 2[2\cos^2(\omega t) - 1]^2 - 1$

$$= 1 - 8\cos^2(\omega t) + 8\cos^4(\omega t)$$

因此当非线性电阻的伏安特性为 $u = 1 - 8i^2 + 8i^4$ 时，该电阻两端的电压中含有 4ω 角频率的电压分量。

○ 17—2　写出题 17—2 图所示电路的结点电压方程，假设电路中各非线性电阻的伏安特性为 $i_1 = u_1^3, i_2 = u_2^2, i_3 = u_3^{3/2}$。



题 17—2 图

解　结点 ① 和 ② 的 KCL 方程为

$$i_1 + i_2 = 12 \qquad ①$$

$$-i_2 + i_3 = 4 \qquad ②$$

将已知伏安特性中的电压用结点电压表示，即

$$i_1 = u_1^3 = u_{n1}^3,\quad i_2 = u_2^2 = (u_{n1} - u_{n2})^2$$

$$i_3 = u_3^{3/2} = u_{n2}^{3/2}$$

将 i_1, i_2, i_3 的表达式代入式 ① 和式 ② 中，得

$$\begin{cases} u_{n1}^3 + (u_{n1} - u_{n2})^2 = 12 \\ -(u_{n1} - u_{n2})^2 + u_{n2}^{3/2} = 4 \end{cases}$$

即为题 17—2 图所示电路的结点电压方程。

◎17—3　一个非线性电容的库伏特性为 $u = 1 + 2q + 3q^2$，如果电容从 $q(t_0) = 0$ 充电至 $q(t) = 1\text{C}$。试求此电容储存的能量。

分析　电容储存能量 $W = \int_{t_0}^{t} P\mathrm{d}t, P = ui = u\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，根据公式求解即可。

解　电容充电时，它所吸收的功率为 $p = ui = u\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (1 + 2q + 3q^2)\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

则此电容储存的能量为 $W = \int_{t_0}^{t} p\mathrm{d}t = \int_{q(t_0)}^{q(t)} (1 + 2q + 3q^2)\mathrm{d}q$

$$= \int_0^1 (1 + 2q + 3q^2)\mathrm{d}q = 3\text{J}$$

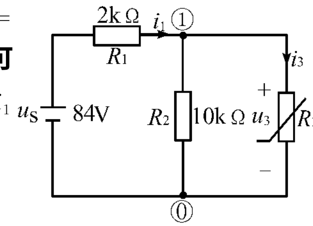
○ 17—4　非线性电感的韦安特性为 $\Psi = i^3$，当有 2A 电流通过该电感时，试求此时的静态电感值。

解　当 $i = 2\text{A}$ 时，静态电感值为 $L = \dfrac{\Psi(i)}{i}\Big|_{i=2\text{A}} = \dfrac{i^3}{i}\Big|_{i=2\text{A}} = 4\text{H}$

动态电感值为

$$L_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}i}\Big|_{i=2\text{A}} = 3i^2\Big|_{i=2\text{A}} = 12\text{H}$$

○ 17－5　**已知题** 17－5 **图所示电路中** $U_S=84\text{V}$，$R_1=2\text{k}\Omega$，$R_2=10\text{k}\Omega$，**非线性电阻** R_3 **的伏安特性可用下式表示**：$i_3=0.3u_3+0.04u_3^2$。**试求电流** i_1 **和** i_3。



题 17－5 图

解　**如题** 17－5 **图所示，列结点电压方程**

$$\begin{cases} u_{n1}=u_3 \\ \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)u_{n1}+i_3=\dfrac{u_S}{R} \end{cases}$$

代入已知条件 $R_1=2\times10^3\Omega$，　$R_2=10\times10^3\Omega$，　$u_S=84\text{V}$

以及 $i_3=0.3u_3+0.04u_3^2$

得
$$u_3^2+7.515u_3-1.05=0$$

解得
$$u_3{}'=0.1372\text{V}，\quad u_3{}''=-7.6522\text{V}$$

当 $u_3{}'=0.1372\text{V}$ **时**

$$i_3{}'=0.3u_3{}'+0.04(u_3{}')^2=0.04192\text{A}$$

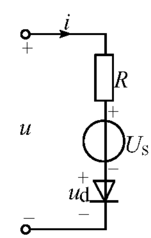
$$i_1{}'=\frac{u_3{}'}{R_2}+i_3{}'=\frac{0.1372}{10\times10^3}+0.04192\approx0.04193\text{A}$$

当 $u_3{}''=-7.6522\text{V}$

$$i_3{}''=0.3u_3{}''+0.04(u_3{}'')^2\approx0.04659\text{A}$$

$$i_1{}''=\frac{u_3{}''}{R_2}+i_3{}''\approx0.04582\text{A}$$

◎17－6　**题** 17－6 **图所示电路由一个线性电阻** R，**一个理想二极管和一个直流电压源串联组成。已知** $R=2\Omega$，$U_S=1\text{V}$ **在** $u-i$ **平面上画出对应的伏安特性。**

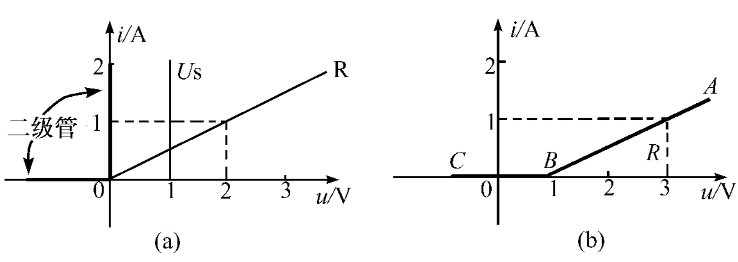


题 17－6 图

分析　**根据各元件的伏安特性即可求解，电阻** R，**电源** U_S **及理想二级管串联。**

解　**各元件的伏安特性如题解** 17－6 **图**(a) **所示，电路方程为**

$$u=Ri+u_d+U_S$$

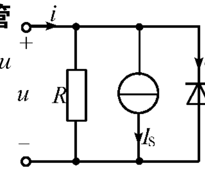


题解 17－6 图

即　　$u=2i+1,\quad i>0$

需求解的伏安特性可用图解法求得，如题解 17－6 图(b) 的折线$\overline{ABC}$（当 $u<1$ 时，$i=0$）。

○ 17－7　题 17－7 图所示电路由一个线性电阻 R，一个理想二极管和一个直流电流源并联组成。已知 $R=1\Omega$，$I_S=1\text{A}$，在 $u-i$ 平面上画出对应的伏安特性。



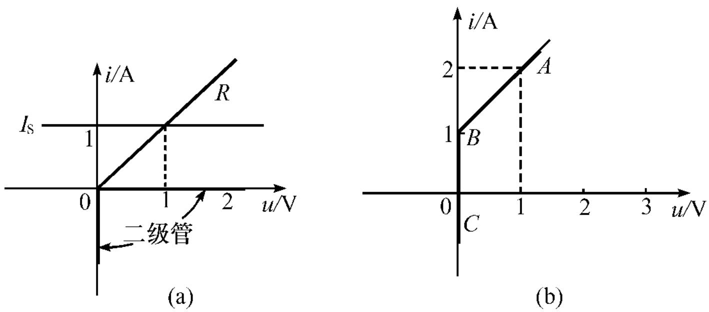
题 17－7 图

解　各元件的伏安特性如题解 17－7 图(a) 所示，电路方程为

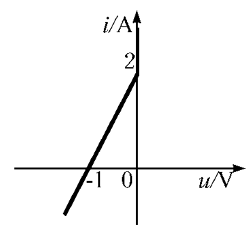
$$i=\frac{u}{R}+I_S+i_d$$

当 $u>0$ 时，$i_d=0$，故 $i=u+1$；

当 $u<0$ 时，二级管完全导通，电路被短路。当 $u>0$ 时，用图解法求得的伏安特性如题解 17－7 图(b) 中的折线$\overline{ABC}$。



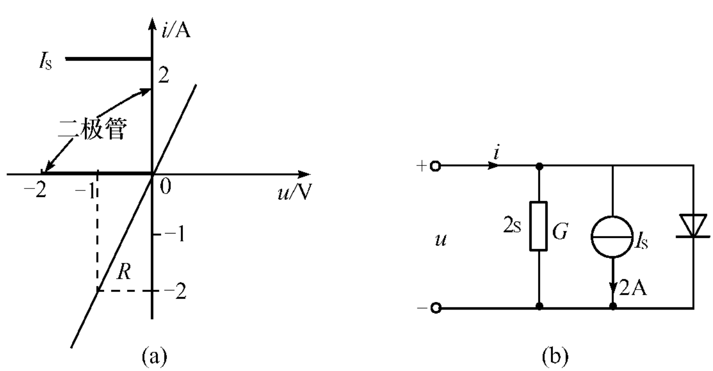
题解 17－7 图



题 17－8 图

○ 17－8　试设计一个由线性电阻，独立电源和理想二极管组成的一端口，要求它的伏安特性具有题 17－8 图所示特性。

解　由图示的伏安特性可得出



题解 17－8 图

$$u=\begin{cases}0 & i\geqslant 2\mathrm{A}\\ \dfrac{1}{2}i-1 & i<2\mathrm{A}\end{cases}$$

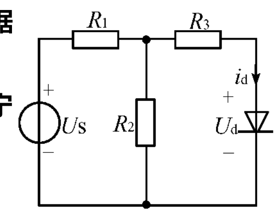
所以 $$i=2u+2=Gu+I_S,\quad u<0$$

当 $i>2\mathrm{A}=I_S$ 时，$u=0$。这样，可以分解为题解 17－8 图(a) 所示的三条伏安特性曲线。由此可以构成题解 17－8 图(b) 所示电路。

● 17－9　设题 17－9 图所示电路中二极管的伏安特性可用下式表示

$$i_d=10^{-6}(e^{40u_d}-1)\mathrm{A}$$

式中 u_d 为二极管的电压，其单位为 V。已知 $R_1=0.5\Omega$，$R_2=0.5\Omega$，$R_3=0.75\Omega$，$U_S=2\mathrm{V}$。试用图解法求出静态工作点。



题 17－9 图

分析　先将电路左边部分等效为戴维宁等效电路，然后根据 $u-i$ 关系，用图解法求解即可。

解　将题 17－9 图中二级管左边部分的线性电路作戴维宁等效，等效电路如题解 17－9 图(a) 所示。

$$u_{oc}=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_S=\frac{1}{2}\times 2=1\mathrm{V}$$

其中

$$R_{eq}=R_3+R_1\,/\!/\,R_2=0.75+0.25=1\Omega$$

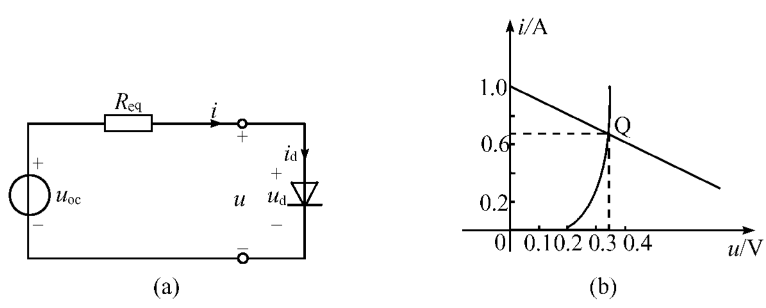
图中线性电路一端口的伏安特性为

$$u=u_{oc}-R_{eq}i=1-i$$

而二极管的伏安特性为 $$i_d=10^{-6}(e^{40u_d}-1)\mathrm{A}$$

其中 $u_d=u$，$i_d=i$。在 $u-i$ 平面上分别作出线性电路的 $i-u$ 特性曲线和二极管的 i_d-u_d 曲线如题解 17－9 图(b) 所示。从图中可得出，静态工作点 Q 的值为

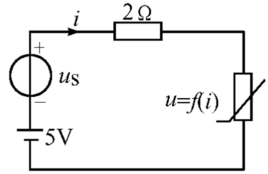
$$U_Q\approx 0.33\mathrm{V},\quad I_Q\approx 0.66\mathrm{A}$$



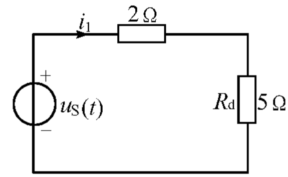
题解 17－9 图

小结　用图解法求解静态工作点是常用的方法。

○ 17－10　题 17－10 图所示非线性电阻电路中，非线性电阻的伏安特性为 $u = 2i + i^3$，现已知当 $u_S(t) = 0$ 时，回路中的电流为 1A。如果 $u_S(t) = \cos(\omega t)\text{V}$ 时，试用小信号分析法求回路中的电流 i。



题 17－10 图



题解 17－20 图

解　根据题意，题 17－10 图所示电路的静态工作点为　$I_Q = 1\text{A}$

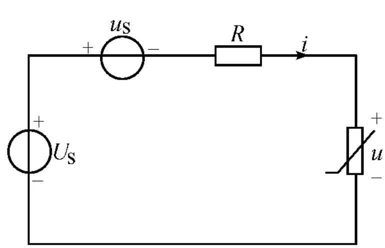
则工作点处的动态电阻为　$R_d = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}\Big|_{i=1\text{A}} = 2 + 3i^2\Big|_{i=1\text{A}} = 5\Omega$

可作出小信号等效电路如题解 17－10 图所示。

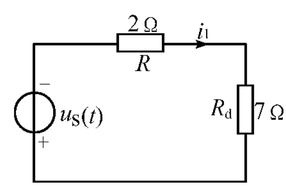
当 $u_S(t) = \cos(\omega t)\text{V}$ 时，小信号电流为：$i_1 = \frac{u_S(t)}{2+5} = \frac{1}{7}\cos(\omega t)\text{A}$

所以，原电路中的回路电流为　$i = I_Q + i_1 = 1 + \frac{1}{7}\cos(\omega t)\text{A}$

● 17－11　题 17－11 图所示电路中 $R = 2\Omega$，直流电压源 $U_S = 9\text{V}$，非线性电阻的安伏特性 $u = -2i + \frac{1}{3}i^3$，若 $u_S(t) = \cos t\text{V}$，试求电流 i。



题 17－11 图



题解 17－11 图

分析　先求出静态工作点，然后根据动态电阻 $R_d = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}$ 可将电路进行等效变换，即可求解。

解　先求电路的静态工作点，令 $u_S(t) = 0$

列 KVL 方程　$Ri + u = U_S$

而 $u = -2i + \frac{1}{3}i^3$，并代入已知值 $R = 2\Omega$，$U_S = 9\text{V}$

从而，有 $$2i - 2i + \frac{1}{3}i^3 = 9$$

解得 $I_Q = 3\text{A}, U_Q = 3\text{V}$ 为静态工作点。

所以，工作点处的动态电阻为 $R_d = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}i}\big|_{i=3\text{A}} = -2 + i^2\big|_{i=3\text{A}} = 7\Omega$

作小信号等效电路如题解 17－11 图所示，当 $u_S = \cos t\text{V}$ 时，

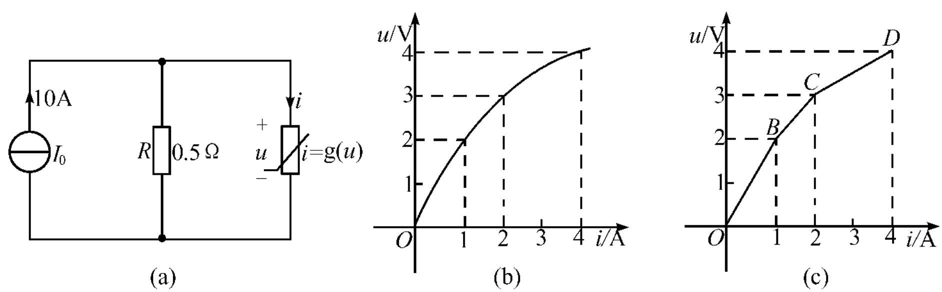
$$i_1 = \frac{-u_S(t)}{2+7} = -\frac{1}{9}\cos t\text{A}$$

所以，原电路中的电流 i 为 $= I_Q + i_1 = 3 - \frac{1}{9}\cos t\text{A}$

小结　求解小信号电路时先确定静态工作点，再求解动态电阻，然后进行等效电路变换即可求解。

○17－12　略

◎17－13　非线性电阻的伏安特性曲线如题 17－13 图(b) 所示，试用分段线性化法给出相应直线段的线性化模型，并求静态工作点。



题 17－13 图　　　　　　题解 17－13 图

分析　根据电阻的伏安特性可知此电阻在各个分段内部仍是线性的，分段求解即可。

解　如题 17－13 图(a) 所示，非线性电阻左侧的线性一端口电路的伏安特性为

$$i = I_0 - \frac{u}{R} = 10 - 2u \qquad ①$$

将题 17－13 图(b) 所示的非线性电阻的伏安曲线分段线性化，如题解 17－13 图所示，分成 OB，BC 和 CD 三段折线，其相应直线段的线性方程为

OB 直线段：　$u = 2i(0 \leqslant i < 1\text{A}, 0 \leqslant u < 2\text{V})$　②

BC 直线段：　$u = i + 1 \quad (1\text{A} \leqslant i < 2\text{A}, 2 \leqslant u < 3\text{V})$　③

CD 直线段：　$u = \frac{1}{2}i + 2(2\text{A} \leqslant i \leqslant 4\text{A}, 3 \leqslant u \leqslant 4\text{V})$　④

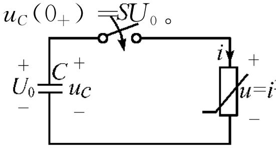
将式 ②、③、④ 分别与式 ① 联立求解，解的结果只有式 ④ 与式 ① 联立后求得

的解在其相应的区域内，即

$$\begin{cases} i = 10 - 2u \\ u = \dfrac{1}{2}i + 2 \end{cases}$$

求得　　$U_Q = 3.5\text{V}, \quad I_Q = 3\text{A}$

○ 17－14　**非线性电阻的伏安特性为 $u = i^3$，如将此电阻突然与一个充电的电容接通，如题 17－14 图，试求电容两端的电压 u_C，设 $u_C(0_+) = U_0$。**



题 17－14 图

解　开关闭合后，有　$u_C = u = i^3$

即 $i = (u_C)^{1/3}$　　又 $i = i_C = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

所以 $-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = (u_C)^{1/3}$　　即 $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{C}(u_C)^{1/3}$

用分离变量法求解微分方程有

$$\int (u_C)^{-1/3}\mathrm{d}u_C = -\frac{1}{C}\int \mathrm{d}t$$

$$[u_C(t)]^{\frac{2}{3}} = -\frac{2t}{3C} + A$$

又已知 $u_C(0_+) = U_0$，所以　$A = U_0^{2/3}$

从而得

$$u_C(t) = (-\frac{2t}{3C} + U_0^{2/3})^{\frac{3}{2}}\text{V}$$

○17－15　略

第十八章

均匀传输线

学习要求

1. 知道什么叫分布参数电路；什么叫均匀传输线；什么是均匀传输线的固有参数。
2. 会建立均匀传输线的偏微分方程；会求解均匀传输线的正弦稳态解；深刻理解行波的概念，会计算行波的速度。
3. 深刻理解均匀传输线特性参数（特性阻抗 Z_C，传输常数 γ）的物理意义及其单位，并会计算 Z_C 和 γ；了解无畸变线的定义与条件。
4. 深刻理解均匀传输线反射系数与输入阻抗的定义与计算；了解均匀传输线终端接各种不同负载（匹配、开路、短路、任意负载）时的效应。
5. 知道什么叫无损耗均匀传输线；会计算无损耗均匀传输线的特性参数（Z_C，γ，α，β，v）和输入阻抗 $Z_{in}(x)$；了解无损耗均匀传输线上电压 $\dot{U}$、电流 $\dot{I}$ 的分布规律。
6. 深刻理解无损耗均匀传输线终端接各种不同负载（匹配、短路、开路、纯感抗、纯容抗、任意负载）时的效应；了解驻波的概念；理解长度 $l<\lambda/4$ 的短路与开路无损耗均匀传输线的应用，并会计算；了解长度 $l=\lambda/4$ 的无损耗均匀传输线的阻抗变换作用，并会计算。
7. 一般性的了解无损耗均匀传输线上的瞬态过程。

知识网络图

均匀传输线
- 分布参数电路
- 均匀传输线及其方程
- 均传输线方程的正弦稳态解
- 均匀传输线的原参数和副参数
- 终端接特性阻抗的传输线
- 终端接任意阻抗的传输线
- 无损耗传输线
- 无损耗线方程的通解
- 无损耗线的波过程

课后习题全解

◎18－1　**一对架空传输线的原参数是 $L_0 = 2.89\times10^{-3}\text{H/km}, C_0 = 3.85\times10^{-9}\text{F/km}, R_0 = 0.3\Omega/\text{km}, G_0 = 0$。试求当工作频率为 50Hz 时的特性阻抗 Z_c，传播常数 γ，相位速度 υ_φ 和波长 λ。如果频率为 10^4Hz，重求上述各参数。**

分析　根据各参数定义公式求解即可。

解　当 $f = 50\text{Hz}$ 时有

$$Z_0 = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0 = 0.3 + \mathrm{j}0.908 = 0.9562\angle 71.715^\circ\ \Omega/\text{km}$$

$$Y_0 = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0 = \mathrm{j}100\pi\times3.85\times10^{-9} = \mathrm{j}1.2095\times10^{-6}\text{S/km}$$

根据传输线副参数与原参数的关系，可得特性阻抗

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0.9562\angle 71.715^\circ}{1.2095\times10^{-6}\angle 90^\circ}} = 889.138\angle -9.143^\circ\ \Omega$$

传播常数

$$\gamma = \sqrt{Z_0Y_0} = \sqrt{0.9562\angle 71.715^\circ\times1.2095\times10^{-6}\angle 90^\circ}$$
$$= 1.075\times10^{-3}\angle 80.858^\circ = (0.171\times10^{-3} + \mathrm{j}1.062\times10^{-3})1/\text{km}$$

即

$$\alpha = 0.171\times10^{-3}\text{Np/km},\qquad \beta = 1.062\times10^{-3}\text{rad/km}$$

相位速度

$$\upsilon_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{100\pi}{1.062\times10^{-3}} = 2.958\times10^5\text{km/s}$$

波长

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f} = \frac{2.958 \times 10^5}{50} = 5.916 \times 10^3 \text{km}$$

当 $f = 10^4 \text{Hz}$ 时，有

$$Z_0 = 0.3 + \text{j}181.584 = 181.58 \underline{/81.91^\circ} \ \Omega/\text{km}$$

$$Y_0 = G_0 + \text{j}\omega C_0 = \text{j}2\pi \times 10^4 \times 3.85 \times 10^{-9} = \text{j}2.419 \times 10^{-4} \text{S/km}$$

则

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{181.58 \underline{/81.91^\circ}}{2.419 \times 10^{-4} \underline{/90^\circ}}} = 8.664 \times 10^2 \underline{/-0.045^\circ} \ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{181.58 \underline{/81.91^\circ} \times 2.419 \times 10^{-4} \underline{/90^\circ}}$$

$$= 20.958 \times 10^{-2} \underline{/89.955^\circ} = (1.646 \times 10^{-4} + \text{j}20.958 \times 10^{-2}) 1/\text{km}$$

即

$$\alpha = 1.646 \times 10^{-4} \text{Np/km}, \qquad \beta = 20.958 \times 10^{-2} \text{rad/km}$$

相位速度

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^4}{20.958 \times 10^{-2}} = 2.998 \times 10^5 \text{km/s}$$

波长

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f} = \frac{2.998 \times 10^5}{10^4} = 29.98 \text{km}$$

○ 18－2　**一同轴电缆的原参数为**：$R_0 = 7\Omega/\text{km}$，$L_0 = 0.3\text{mH/km}$，$C_0 = 0.2\mu\text{F/km}$，$G_0 = 0.5 \times 10^{-6} \text{S/km}$。**试计算当工作频率为** 800Hz **时，此电缆的特性阻抗** Z_c，**传播常数** γ，**相位速度** v_φ **和波长** λ。

解

$$Z_0 = R_0 + \text{j}\omega L_0 = 7 + \text{j}2\pi \times 800 \times 0.3 \times 10^{-3} = 7.1606 \underline{/12.157^\circ} \ \Omega/\text{km}$$

$$Y_0 = G_0 + \text{j}\omega C_0 = 0.5 \times 10^{-6} + \text{j}2\pi \times 800 \times 0.2 \times 10^{-6}$$

$$= 1.0053 \times 10^{-3} \underline{/89.97^\circ} \ \text{S/km}$$

则

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{7.1606 \underline{/12.157^\circ}}{1.0053 \times 10^{-3} \underline{/89.97^\circ}}} = 84.397 \times \underline{/-38.91^\circ} \ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{7.1606 \underline{/12.157^\circ} \times 1.0053 \times 10^{-3} \underline{/89.97^\circ}}$$

$$= 8.484 \times 10^{-2} \underline{/51.064^\circ} = 5.332 \times 10^{-2} + \text{j}6.599 \times 10^{-2} 1/\text{km}$$

即

$$\alpha = 5.332 \times 10^{-2} \text{Np/km}, \qquad \beta = 6.599 \times 10^{-2} \text{rad/km}$$

相位速度

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 800}{6.599 \times 10^{-2}} = 7.616 \times 10^4 \text{km/s}$$

波长

$$\lambda = \frac{v_\varphi}{f} = \frac{7.616\times10^4}{800} = 95.206\text{km}$$

○ 18－3　**传输线的长度** $l=70.8\text{km}$**，其** $R_0=1\Omega/\text{km}$，$\omega C_0=4\times10^{-4}\text{S/km}$**，而** $G_0=0$，$L_0=0$。**在线的终端所接阻抗** $Z_2=Z_C$。**终端的电压** $U_2=3\text{V}$。**试求始端的电压** U_1 **和电流** I_1。

解　**先计算传输线的特性阻抗和传播常数**

$$Z_c=\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}}=\sqrt{\frac{R_0}{j\omega C_0}}=\sqrt{\frac{1}{j4\times10^{-4}}}=50\angle{-45^\circ}\ \Omega/\text{km}$$

$$\gamma=\sqrt{(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)}=\sqrt{R_0\times j\omega C_0}=\sqrt{1\times j4\times10^{-4}}$$
$$=0.02\angle{45^\circ}=(1.41\times10^{-2}+j1.41\times10^{-2})1/\text{km}$$

因负载阻抗等于特性阻抗，故传输线工作在匹配状态，传输线中没有反射波。设传输线的终端为坐标起点，则沿线电压波的分布为

$$\dot{U}(x)=\dot{U}^+\mathrm{e}^{-\gamma x}$$

把 $\dot{U}(0)=U_2=3\angle{0^\circ}\ \text{V}$ **代入，可得**

$$\dot{U}^+=U_2=3\angle{0^\circ}\ \text{V}$$

始端电压为

$$\dot{U}_1(-l)=3\angle{0^\circ}\ \mathrm{e}^{\gamma\times70.8}=3\angle{0^\circ}\ \mathrm{e}^{0.02\angle{45^\circ}\times70.8}=8.164\mathrm{e}^{j1.001}\text{V}$$

始端电流为

$$\dot{I}_1(-l)=\frac{\dot{U}_1(-l)}{Z_c}=\frac{8.164\mathrm{e}^{j1.001}}{50\angle{-45^\circ}}=0.1633\mathrm{e}^{j1.786}\text{A}$$

故始端电压、电流的有效值为

$$U_1=8.164\text{V},\quad I_1=0.1633\text{A}$$

◎ 18－4　**一高压输电线长** 300km**，线路原参数** $R_0=0.06\Omega/\text{km}$，$L_0=1.40\times10^{-3}\text{H/km}$，$G_0=3.75\times10^{-8}\text{S/km}$，$C_0=9.0\times10^{-9}\text{F/km}$。**电源的频率为** 50Hz。**终端为一电阻负载，终端电压为** 220kV**，电流为** 455A。**试求始端的电压和电流。**

分析　**由各特性参数公式求解即可。**

解　**先计算传输线的** Z_c **和** γ：

因
$$Z_0=R_0+j\omega L_0=0.06+j0.4398=0.4439\angle{82.3^\circ}\ \Omega/\text{km}$$
$$Y_0=G_0+j\omega C_0=3.75\times10^{-8}+j100\pi\times9\times10^{-9}$$
$$=2.8277\times10^{-6}\angle{89.24^\circ}\ \text{S/km}$$

则

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{0.4439\angle 82.3^\circ}{2.8277\times 10^{-6}\angle 89.24^\circ}} = 396.21\angle -3.47^\circ\ \Omega$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{Z_0 Y_0} = \sqrt{0.4439\angle 82.3^\circ \times 2.8277\times 10^{-6}\angle 89.24^\circ}\\ &= 1.1204\times 10^{-3}\angle 85.77^\circ\\ &= (8.246\times 10^{-5} + \mathrm{j}1.1173\times 10^{-3})1/\mathrm{km}\end{aligned}$$

设传输线终端电压为 $\dot{U}_2 = 220\angle 0^\circ\ \mathrm{kV}$，$\dot{I}_2 = 455\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$（**因是电阻负载**）**代入电压、电流的通解式中，有**

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_2 = \dot{U}^+ + \dot{U}^-$$

$$\dot{I}(0) = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}^+}{Z_c} - \frac{\dot{U}^-}{Z_c}$$

从以上两式中解得

$$\dot{U}^+ = \frac{\dot{U}_2 + Z_c\dot{I}_2}{2} \qquad \dot{U}^- = \frac{\dot{U}_2 - Z_c\dot{I}_2}{2}$$

所以沿线电压、电流分布为

$$\dot{U}(x) = \frac{\dot{U}_2 + Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{+\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 - Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{-\gamma x} = \dot{U}_2\cosh(\gamma x) + Z_c\dot{I}_2\sinh(\gamma x)$$

$$\begin{aligned}\dot{I}(x) &= \frac{1}{Z_c}\left[\frac{\dot{U}_2 + Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{+\gamma x} - \frac{\dot{U}_2 - Z_c\dot{I}_2}{2}\mathrm{e}^{-\gamma x}\right]\\ &= \dot{I}_2\cosh(\gamma x) + \frac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh(\gamma x)\end{aligned}$$

当 $x = 300\mathrm{km}$ **时，有**

$$\cosh(\gamma x) = 0.9446 + \mathrm{j}8.14\times 10^{-3}$$
$$\sinh(\gamma x) = 2.337\times 10^{-2} + \mathrm{j}0.329$$

故传输线始端电压、电流为

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}(300)\\ &= 220\angle 0^\circ \times (0.9446 + \mathrm{j}8.14\times 10^{-3})\\ &\quad + 396.21\times 10^{-3}\angle -3.47^\circ \times 445\times (2.337\times 10^{-2} + \mathrm{j}0.329)\\ &= 223.486\angle 15.452^\circ\ \mathrm{kV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \dot{I}(300)\\ &= 445\times (0.9446 + \mathrm{j}8.14\times 10^{-3})\\ &\quad + 10^3\times \frac{220\times (2.337\times 10^{-2} + \mathrm{j}0.329)}{396.21\angle -3.47^\circ}\\ &= 422.242 + \mathrm{j}186.754\end{aligned}$$

$= 461.698 \angle 23.86° \text{ A}$

●18－5　**架空无损耗传输线的特性阻抗 $Z_c = 300\Omega$，线长 $l = 2\text{m}$。当频率为 300MHz 和 150MHz 时，试分别画出终端开路、短路及接上匹配负载时，电压 u 和 $|\dot{U}|$ 沿线的分布。**

分析　无损传输线电压 $\dot{U} = \dot{U}_2\cos\beta x + jZ_C\dot{I}_2\sin\beta x$，当终端开路时令 $\dot{I}_2 = 0$，短路时 $\dot{U} = 0$，接匹配负载时 $Z_c = Z_l$，求解即可。

解　无损耗传输线沿线电压的分布为

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2\cos\beta x + jZ_c\dot{I}_2\sin\beta x$$

当频率 $f = 300\text{MHz}$ 时，上式中相位常数 β 为

$$\beta = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi f}{v_\varphi} = \frac{2\pi \times 300 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2\pi\text{rad/m}$$

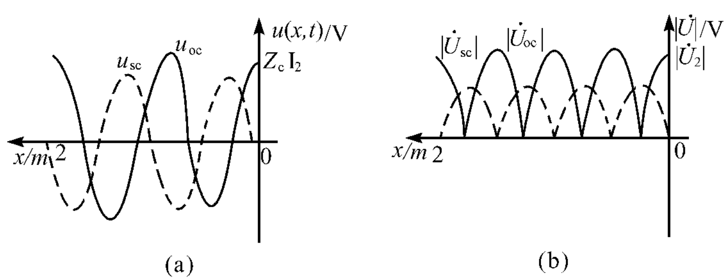
(1) 终端开路，即 $\dot{I}_2 = 0$，则沿线电压为

$$\dot{U}_{oc}(x) = \dot{U}_2\cos\beta x = \dot{U}_2\cos 2\pi x$$

其瞬时表示式为

$$u_{oc}(x,t) = \sqrt{2}U_2\cos 2\pi x\cos\omega t$$

即 $u_{oc}(x,t)$ 呈驻波分布，在 $x = 0.25, 0.75, 1.25, 1.75\text{m}$ 处，$u_{oc}(x,t)$ 总是为零。$u_{oc}(x,t)$ 的波形如题解 18－5 图(a) 所示，$|\dot{U}_{oc}|$ 的分布如题解 18－5 图(b) 所示。



题解 18－5 图

(2) 终端短路，即 $\dot{U}_2 = 0$，沿线电压为

$$\dot{U}_{sc} = jZ_c\dot{I}_2\sin\beta x = jZ_c\dot{I}_2\sin 2\pi x$$

其瞬时表示式为

$$u_{sc}(x,t) = \sqrt{2}Z_cI_2\sin 2\pi x\cos(\omega t - 90°)$$

$u_{sc}(x,t)$ 仍呈驻波分布，在 $|u_{oc}|$ 取最大值处，$u_{sc}(x,t)$ 为零值，而在 $u_{oc} = 0$

处，$|u_{sc}|$ 取最大值，$u_{sc}(x,t)$ 的波形见题解 18－5 图(a) 中的虚线所示。

(3) 传输线接匹配负载时，即 $Z_L = Z_C$ 上无反射波，故沿线电压分布为

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 e^{+j\beta x} = \dot{U}_2 e^{+j2\pi x}$$

其瞬时表示式为

$$u(x,t) = \sqrt{2}U_2\cos(\omega t + 2\pi x)$$

即传输线工作在行波状态，沿线各处的电压幅值相等。

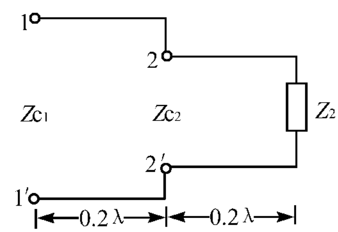
当频率 $f = 150\text{MHz}$ 时

$$\beta = \frac{\omega}{\upsilon_\varphi} = \frac{2\pi \times 150 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \pi\text{rad/m}$$

在各种终端情况下，电压表示式与上述相似，波形反相。这里略去不画。

小结 无损传输线电压的分布为 $\dot{U} = U_2\cos\beta x + jZ_c\dot{I}_x\sin\beta x$，对于特殊情况，特殊对待

○ 18－6 两段特性阻抗分别为 Z_{c1} 和 Z_{c2} 无损耗线连接的传输线如题 18－6 图。已知终端所接负载为 $Z_2 = (50 + j50)\Omega$。设 $Z_{c1} = 75\Omega$，$Z_{c2} = 50\Omega$。两段线的长度都为 0.2λ（λ 为线的工作波长），试求 $1-1'$ 端的输入阻抗。



题 18－6 图

解 无损耗传输线的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = Z_c\frac{Z_2 + jZ_c\tan\beta x}{Z_c + jZ_c\tan\beta x}$$

把 $2-2'$ 端向负载端看进去的输入阻抗为

$$Z_{in1} = Z_{c2}\frac{Z_2 + jZ_{c2}\tan(\beta \times 0.2\lambda)}{Z_{c2} + jZ_{c2}\tan(\beta \times 0.2\lambda)}$$

把 $\beta = \frac{\omega}{\upsilon_\varphi} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 代入式中，有

$$Z_{in1} = 50 \times \frac{(50 + j50) + j50\tan 0.4\pi}{50 + j(50 + j50)\tan 0.4\pi} = 56.5327\angle -47.8^\circ$$

$$= 37.973 - j41.881\Omega$$

把 Z_{in1} 看作传输线 1 的负载，则 $1-1'$ 端的输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_{c1}\frac{Z_{in1} + jZ_{c1}\tan\beta x}{Z_{c1} + jZ_{in1}\tan\beta x}$$

$$= 75 \times \frac{(37.973 - j41.881) + j75\tan 0.4\pi}{75 + j(37.973 - j41.881)\tan 0.4\pi}$$

$$= 61.503\angle 48.816^\circ = 40.498 + j46.287\Omega$$

○ 18－7 特性阻抗为 50Ω 的同轴线，其中介质为空气，终端连接的负载 $Z_2 = (50 + j100)\Omega$。试求终端处的反射系数，距负载 2.5cm 处的输入阻抗和反射系数。已知同轴线的工作波长为 10cm。

解　当频率较高时，同轴线可看作是无损耗的。传输线上任一点的反射系数为该点反射波电压与入射波电压之比。即

$$n=\frac{\dot{U}^{-}\ \mathrm{e}^{-\beta x'}}{\dot{U}^{+}\ \mathrm{e}^{\beta x'}}=\frac{\dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+}}\mathrm{e}^{-2\beta x'}=\frac{\dot{U}_2-Z_c\dot{I}_2}{\dot{U}_2+Z_c\dot{I}_2}\mathrm{e}^{-2\beta x'}=\frac{Z_2-Z_c}{Z_2+Z_c}\mathrm{e}^{-2\beta x'}$$

无损耗线有 $\gamma=\mathrm{j}\beta$，因此在 $x'=0$ 的终端，反射系数为

$$n_2=\frac{Z_2-Z_c}{Z_2+Z_c}=\frac{50+\mathrm{j}100-50}{50+\mathrm{j}100+50}=\frac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ$$

离负载 2.5cm 处的反射系数为（把 $\beta=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 代入）

$$n=\frac{Z_2-Z_c}{Z_2+Z_c}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta\times 2.5}=n_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ-180^\circ=0.707\angle -135^\circ$$

离负载 2.5cm 处的输入阻抗为

$$Z_{\mathrm{in}}=Z_c\frac{Z_2+\mathrm{j}Z_c\tan(\frac{2\pi}{\lambda}\times 2.5)}{Z_c+\mathrm{j}Z_2\tan(\frac{2\pi}{\lambda}\times 2.5)}=\frac{Z_c^2}{Z_2}=\frac{2500}{50+\mathrm{j}100}$$

$$=10-\mathrm{j}20\angle -63.435^\circ\ \Omega$$

◯18－8　**略**