1. 数字信号处理概述
2. 离散时间信号
3. 线性时不变系统
4. 信号与系统的相互作用
5. 离散傅里叶变换
6. 快速傅里叶变换
7. 数字滤波器概述
8. 有限冲激响应滤波器
9. 无限冲激响应滤波器

**信号处理**，就是从一个错综复杂的信号中提取或增强有用的信息，同时抑制其中的有害信息，为提取，增强，存储和传输有用信息而设计的一种运算。

**数字信号处理**，就是将信号以数字方式表示并处理的理论和技术。1965年FFT算法问世。

数字信号处理的主要研究内容包括以下10个方面：

1 信号的采集，包括模/数变换技术，采样定理等

2 离散时间信号的分析，包括时域即频率分析，离散傅里叶变换等

3 离散系统的分析，包括差分方程，单位冲激响应，频率响应，频率响应，Z变换等

4 信号处理中的快速算法，包括快速傅里叶变换，快速卷积与相关等

5 数字滤波技术，包括各种滤波器的设计与实现等

6 信号的建模，包括MA，AR及ARMA等各种模型

7 信号的传输与存储，包括信号的各种调制方式，压缩算法等

8 信号的检测与估计，包括信号的参数估计、波形估计、各种检测算法等

9 数字信号处理的实现，包括软件实现与硬件实现

10 数字信号处理的应用

构筑经典数数字信号处理的两大基石是线性时不变系统和高斯白噪声。

理解数字信号处理的三把钥匙：时域与频域的相互切换，向量和MatLab软件。

时域与频域之间联系的桥梁是傅里叶变换。向量的长度表示了信号的幅度，旋转的速度表示了信号的频率。

数字信号处理和数字信号处理器不同，DSP通常指的是后者。

**第二章 离散时间信号**

信号通常是随时间或空间变化的有限实值函数。自然界的信号，目前为止都是实数的，暂时还没发现自然的复数信号。信号处理中用到大量的复数信号主要是为了数学处理上的方便。

信号可分为：

1 确定信号与随机信号

 确定信号可分为周期信号和非周期信号，随机信号可分为平稳信号和非平稳信号

2 连续信号与离散信号

3 模拟信号与数字信号

注：连续信号和模拟信号不完全相同，离散信号和数字信号也不一样。模拟信号和数字信号要求更严格，前者要求幅度变化必须连续，后者要求幅度变化必须离散。连续和离散无此要求。

典型信号有：

1 单位冲激信号

 冲激串的频谱仍然是冲激串。频域冲激串间隔Ωs 和时域冲激串间隔Ts 满足Ωs =2π/Ts =2πfs

2 单位阶跃信号

3 脉冲信号(矩形信号)，与单位阶跃不太一样

4 正弦信号

 模拟角频率$ω$与模拟频率f不同，$ω$ = 2π/T = 2πf，f = 1/T，模拟角频率$ω$表示振动物体在2π秒内振动的次数，或者说是每秒转过的弧度。模拟频率f表示物体在1s内振动的次数，表示振动快慢的物理量。

模拟频率f、模拟角频率Ω和数字角频率$ω$三者的关系如下：其中Ω=2π$f$

$ω=2πfT\_{s}=\frac{2πf}{f\_{s}}=ΩT\_{s}=Ω/f\_{s}$，其中$f\_{s}$为采样频率。

凡是经模拟信号采样后得到的离散信号，其模拟角频率和采样频率与数字角频率成线性关系。或者说，数字角频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。

5 指数信号

信号基本运算：加，减，累加，乘(时间尺度变换)，移位(延时，时移)

信号处理发展的历史，在某种程度上可以看做是信号与噪声相互斗争的历史，信号处理的主要目标之一就是如何区分信号与噪声。

人们常用概率统计的方法来描述噪声，因为噪声是随机信号，没有标准的函数表示。对于给定的时刻n，噪声v(n)的取值服从某种分布，比如均匀分布或者高斯分布。经典数字信号处理最基本的假设之一就是假设噪声为高斯白噪声。

从模拟信号到数字信号：采样----量化----编码

时域采样等效于频域的周期延拓。

频域采样等效于时域的周期延拓。

信号的带宽是一个描述信号变化速度快慢的物理量，就是最高频率分量和最低频率分量之差。信号采样等效于数学运算，模拟信号与一串冲激函数的乘积。

量化是指将信号幅度的连续取值近似为有限多个离散值的过程，会产生误差（即量化误差，量化噪声）。量化主要应用于从离散信号到数字信号的转换中。模拟信号经采样称为离散信号，离散信号经过量化称为数字信号。

两个相邻的量化电平之差称为量化分辨率，其值为$Δ$=2Vm/M，其中M=2B ，B为量化位数。

量化误差是一个随机变量，且可以看作是一个服从均匀分的白噪声信号，即量化的过程可以等效为采样后的离散信号加上一个服从均匀分布的白噪声。所以，分析量化误差的影响时，使用加性噪声模型。热噪声是信号中最基本的噪声分量，这时对量化噪声的要求就是要小于信号中的这些基本的噪声。

量化后的信号只有有限个离散幅度值，编码的过程就是将量化的信号电平值转换成二进制码组的过程。数字的表示格式有三种，原码，反码，补码。补码应用最广。

分辨率固定不变的是定点数，分辨率浮动变化的是浮点数。

在数字信号处理的硬件设备中，编码是通过数字逻辑电路来实现的。在数字信号处理的硬件设备中，包括采样，量化和编码在内的模拟信号数字化的整个过程都被集成为一个芯片来实现，完成这整个功能的芯片就是模/数转换器(ADC)。

当采样频率大于信号中最大频率的两倍时，采样后的数据可以不失真地描述原始信号(用频率描述原始信号，即采样后视频率和原始信号的频率一样)。当采样频率不满足这个条件时，会出现频率折叠和频率重复。通常称采样频率的一半为奈奎斯特频率。

在满足采样定理的情况下，如果系统的主要矛盾是量化噪声，那么采样频率尽可能高一些，如果主要矛盾是硬件开销，那么采样频率尽可能低一些。

数字信号化过程中的参数选择：主要包括抗混叠滤波器的截止频率及阻带衰减，采样频率和量化位数这4个参数的选取原则。

数字信号是周期延拓的，理想的情况下，将数字信号通过一个理想的低通滤波器，即可得到模拟信号的频谱。

从数字信号到模拟信号的转换:理论上是通过一个理想低通滤波器，实际中是通过信号保持电路和抗镜像滤波器实现。经过保持电路之后，两个离散时刻之间的空隙被填满了，填充的数值是当前的样本值。从时域的角度看，填平空隙后额信号比采样信号更光滑了；从频域的角度看，采样信号中频率较高的部分被滤掉了。经过保持电路之后，虽然比采样信号更光滑一些，但在新的样本值得地方还是存在跳跃，这种时间上的突变从直观上很好理解，就是还有一些高频分量。这是因为相对于理想的低通滤波器，保持电路所等效的低通滤波器在阻带的衰减还比较大，导致高频分量没有得到完全抑制。对于经保持电路还残存的高频分量，再通过一个低通滤波器就可以较好地恢复出模拟信号。后面的这个低通滤波器通常称为抗镜像滤波器。

**第三章 线性时不变系统LTI**

如果一个系统任意时刻的输出至多取决于本时刻的输入，而不依赖过去和将来时刻的输入，则该系统称为静态系统或无记忆系统，比如放大器就是一个典型的静态系统。在其他情况下，系统称为动态系统或有记忆系统，比如单位延时器就是一个典型的动态系统。

线性：一个系统具有齐次性(比例性)，又具有可加性，则称该系统为线性系统。

时不变:系统的输入/输出关系不随时间而变化，或者说系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关。y(n-k) = T[x(n-k)]，将输入x(n)直接延时k个单位和将y(n)直接延时k个单位。（若输入信号仅是延迟关系，那么输出信号之间也是相同的延迟关系）

因果系统：系统在任意时刻n的输出只取决于当前和以前时刻的输入。现实中的实时信号处理系统都是因果系统。

稳定系统：输入输出都有界的系统。

在连续系统的时域表示中，常用微分方程来进行描述。在离散系统中，用差分方程来描述。

LTI系统的时域描述 : 差分方程(离散系统)，单位冲激响应h(x)

**两类最常用的LTI系统**：

1 FIR(有限冲激响应)系统：h(n)只在某一有限时间段内的取值不为0，在这个时间段之外的取值均为0.

2 IIR(无限冲激响应)系统：h(n)的取值在整个时间范围内都不为0.

在数字信号处理中，LTI系统常被称为滤波器，因此FIR系统也称为FIR滤波器，同样，IIR系统称为IIR滤波器。

**LTI系统的特征信号**

用齐次性，可加性和时不变性来定义了一个LTI系统，用差分方程和单位冲激响应来描述了LTI系统。

复正弦信号是LTI系统的特征信号，即复正弦信号通过一个LTI系统后，其频率保持不变。频率不变性是LTI系统的特征，非LTI系统没有频率不变的特性。

将信号分解为多个复正弦信号之和，然后再研究系统对复正弦信号响应的研究方法，在信号处理中称为傅里叶分析。对信号和系统进行频率分析的工具是傅里叶变换。对信号的频率分析也称为频谱计算，对系统的频率分析也称为频率响应。

不管是在时域上将信号分解为单位冲激信号，然后用单位冲激响应来表征系统，还是在频域上将信号分解为复正弦信号，然后用频率响应来表征系统，所描述的问题具有等效性。

Z变换在时域分析，频域分析和解差分方程三种分析方法间架起了桥梁。从信号的单位冲激信号分解的角度，可以从时域来分析；如果从信号的复正弦信号的分解角度，可以从频域来分析；当然也还可以直接利用解差分方程的方法来分析。用Z变换的方法，一个LTI系统的特性可以用传递函数H(z)来描述（这是因为一个LTI系统的单位冲激响应h(n)就可以完全表征系统本身）。

Z变换，Z逆变换，系统传递函数(单位冲激响应h(n)的Z变换，h(n)的傅里叶变换叫做单位冲激频率响应)，

通过Z变换，将系统输入/输出关系由复杂的求和变成了简单的相乘。给系统的分析带来很大的方便。Y(z)=X(z)H(z)

由传递函数H(z) = N(z)/D(z)知，除了常数K之外，整个系统函数可以由它的全部零、极点来唯一确定。这里的零、极点可能是实数，纯虚数或者复数。零、极点若为虚数或者复数，则一定共轭成对出现。

将系统函数的零，极点全部标注在z平面上得到的图形，称为系统的零极图。单位圆即|z|=1.

1. **从零极图看单位冲激响应（H(z)是h(n)的Z变换）**

系统的零极图可以很直观的反映单位冲激响应h(n)的形状。

当极点在单位圆内时，h(n)随着n的增加而逐步衰减；当极点在单位圆上时，h(n)为常数；当极点在单位圆外时，h(n)随着n的增加而不断放大。注:当极点为负数时，会导致h(n)在正数和负数之间交替变换。单位冲激响应h(n)的形状主要由极点决定。、

1. 从零极图看系统因果性

对因果系统而言，只要H(z)确定，其极点也就确定了进而也就确定了收敛域，可以得到唯一的h(n)。

1. 从零极图看系统稳定性

只有当H(z)的收敛域包含单位圆|z|=1时，h(n)绝对可和，这时系统就是稳定的。所有极点在单位圆内，此时h(n)绝对可和，从而系统稳定。

**系统频率响应**

复正弦信号是LTI系统的特征信号(即特征向量)，其对应的特征值称为系统的频率响应，即h(n)的离散时间傅里叶变换。

频率响应H(ejw)一般为复数，可用实部和虚部表示，或者用幅度和相位来表示。

**H(k) = HR(k) + jHI(k) = |H(k)|**$e^{jφ(k)}$**，H(ejw) = |H(ejw)|**$e^{jφ(ω)}$

h(n) 完全表征了LTI系统的时域特性，H(ejw)完全表征了LTI系统的频域特性。

1 **幅频响应**

表征的是系统对不同频率信号幅度的放大或衰减。幅频响应越大，则对应频率信号的选择性越好，此时信号能更好的通过系统；幅频响应越小，刚好相反。幅频响应是周期性的，周期为2π。一般是偶对称的。

在工程实际中，幅频响应通常以dB为单位。在分析具体问题时，通常只考虑一个周期内的幅频响应，这是因为采样定理保证了有用的信号频谱都在一个周期内。

2 **相频响应**

表征的是系统对不同频率信号相位的超前或者滞后。以2π为周期。一般是奇对称。具有一个显著的特点是具有模糊性，而且模糊的周期是2π。对于模糊造成的相频响应曲线的不连续，也可以通过数学上称为解缠绕的方法，得到连续的相频响应曲线。

相频响应：$φ\left(ω\right)= tan^{-1}\frac{H\_{I}(e^{jω})}{H\_{R}(e^{jω})}$ , 群延时：$τ\_{g}\left(ω\right)= -\frac{d}{dω}φ(ω)$

从物理上，相频响应反映了系统对不同频率信号的处理时间，但不是说相频响应越大，系统的处理时间越长。相位不仅和时间有关，还和频率有关。在信号处理中，群延时(Group Delay)是用来表征系统延时时间的另一个概念。相频响应反映的是系统对输入信号延时的相对值，群延时反映的是系统对输入信号延时的绝对值。对于频率成分比较复杂的信号，相频响应为常数反而会造成信号的失真；群延时为常数的系统不会对信号产生失真。

在实际的信号处理中，群延时往往是用来衡量系统对输入信号是否产生失真，因此有的地方也称为包络延时。相频响应是一个比群延时内涵更宽泛的概念。如果群延时为常数，则对应的相频响应有$φ\left(ω\right)=-ωn$，这样的形式，称为系统的线性相位。

3 Z变换与频率响应

频率响应是系统函数的一种特殊情况，频率响应H(ejw)就是系统函数H(z)在单位圆z=ejw上的取值，即H(ejw)= H(z)$|\_{z=e^{jω}}$。

**More**：通过傅里叶变换计算得到的系统频率响应物理意义明确，并且能完全反映系统在频域的特性。但傅里叶变换最大的问题在于其收敛的条件比较苛刻，对离散信号和系统而言，只有在时域内绝对可和的信号才存在。为了解决傅里叶变换收敛条件苛刻的问题，引入了Z变换。在进行信号和系统的分析过程中，可以先得到Z变换这种更普遍的结果，然后再得到傅里叶变换这种特殊结果。

给定一个信号空间，可以确定一组基，使得该信号空间的所有信号都可以由该基表示。若将信号空间进一步扩大，那么该空间为扩大后空间的一个子空间。而扩大后空间自身又可以确定一组基使得扩大后空间的每个信号都可以由该基表示。例如：要表示所有信号需要的基为$δ$(t-$τ$)，而表示所有周期信号只需要$e^{jωt}$，但是所有周期信号也可以用更大空间的所有信号的基$δ$(t-$τ$)来表示；又例如，所有周期为T的信号空间为所有周期为2T的信号空间的一个子空间。

这里，如果将空间进一步由$e^{jωt}$生成的空间扩大到$e^{st}$，s$\in C$生成的空间，信号f(t)在这个基下的坐标被称为拉普拉斯变换。

**LTI系统的向量理解（借助零极图来大概地了解系统的频率响应）**

向量的长度表示复数的幅度，向量和实轴的夹角表示复数的相位。复数的向量表示完全表征了一个复数(频率响应通常为复数)的全部信息，向量使得复数的表示和运算都非常的直观。

接近单位圆的零点会引起在这个点附近的单位圆上的频率的幅度响应变小；与此相反，接近单位圆的极点会引起在这个点附近的单位圆上的频率的幅度响应变大。零点影响幅度响应的**谷值**及形状，极点影响幅度响应**峰值**及尖锐程度。

借助向量，在零极图上可以很容易由系统函数H(z)得到系统频率响应的定性分析结果。由初步分析得到的系统频率的幅频响应就大概了解了系统的部分特性。

**两种特殊LTI系统的分析**

1 全通系统，即系统频率响应|H(ejw)|对于所有频率w均为常数。

为0的极点对幅度响应没有任何影响，影响的只是相位响应（此时向量长度恒为1）。除了零极点在相同的位置两者能够抵消之外，零极点关于单位圆共轭倒置的时候在幅度响应上也能抵消。

2 最小相位系统

所有的零、极点都位于单位圆内的系统。相频响应的变化越小越好。

当系统的所有零点都在单位圆内时，ω沿单位圆逆时针旋转一圈导致的相位变化为0，这个变化显然是最小的，此时的系统称为最小相位系统。单位圆内外的零点引入的相位变化要大于单位圆内的零点。

最小相位系统要求极点都在单位圆内的原因是考虑系统的稳定性，要求零点在单位圆内，是考虑所带来的相位变化最小。

极点虽然也可以影响相位，但因为极点和系统的稳定性密切相关，因此如果想调整系统的相位特性，一般很少从极点的角度考虑。这种情况下，往往是通过调整零点位置来实现系统的相位调整。零点越多的话，系统的延时越厉害。

正因为最小相位系统具备逆系统的稳定性，很多时候我们希望将系统中的最小相位系统部分分解出来，并且不破坏系统的幅频响应。这种分解很方便地用全通系统零极点关于单位圆共轭倒置的特性实现。数学公式表示如下：

H(z) = Hmin(z)Hap(z)，其中Hmin(z)表示H(z)幅频响应相同的最小相位系统，Hap(z)表示全通系统。

**第四章 信号与系统的相互作用**

信号与系统的相互作用实际上可以理解为系统的输入与输出之间的关系。

**1 卷积**

系统的输入/输出关系可以表示为：

y(n) = T[x(n)] = $\sum\_{m=-\infty }^{\infty }x\left(m\right)h(n-m)$，可以记为

y(n) = x(n)\*h(n)

1. **输入信号的角度**

**y(n) =** $\sum\_{m=-\infty }^{\infty }x\left(m\right)h(n-m)$ **= x(n)\*h(n)**

h(n)是指输入为单位冲激时系统的输出。通俗的说，仅在n=0时刻给系统输入一个值，系统不只在n=0时刻有输出，在n=1，2，…, N-1等随后的时刻还有输出。对于一个信号来说，不同时刻的输入值x(m)对系统的输出都有贡献，贡献的大小一方面与x(m)的大小有关，另一方面与m的大小有关。系统的输出就是将不同的x(m)的贡献都加起来的结果。(摔跤的例子)

1. **系统的角度**

**y(n) =** $\sum\_{m=-\infty }^{\infty }h\left(m\right)x(n-m)$ **= h(n)\*x(n)**

系统的h(n)可以看作是一组加权系数，系数的输出不仅和当前时刻的输入有关，而且与之前时刻的输入有关，而且和之前时刻的输入有关，但不同时刻的输入对输出的影响是不一样的，h(n)这组加权系数就是表征这种不同的影响。信号处理的过程就是对输入信号加权运算的过程。(火车站的危险品扫描系统，FIR滤波器)

卷积运算满足交换律。

卷积的边界效应不仅在信号和系统刚刚开始相互作用时出现，而且在信号输入要结束时也会出现。开始时存在边界效应的点数是M-1，实际中应将h(n)长度尽可能减小。

**卷积定理：Y(ejw) = X(ejw)H(ejw) ,这表明，从频域看来，卷积运算变为输入信号傅里叶变换和系统频率响应的乘积。信号与系统的相互作用，在时域表现为卷积，在频域表现为乘积。**

对于输入信号x(n)来说，可以分解为多个复正弦信号之和，X(ejw)就是对应频率的系数。卷积定理可以很方便的从Z变换得到。

现实中的信号都是能量有限，带宽有限的。但为了分析方便，在信号处理中也经常要用到一些能量无限的理想信号，比如周期信号等，为此引入了功率信号的概念。

**2 相关**

信号处理中，相关最基本的含义是定量的衡量两个信号的相似程度，包括自相关和互相关。

1）能量信号相关的定义

**rxy(m) =** $\sum\_{m=-\infty }^{\infty }x(n)y(n-m)$**， rxx(m) =** $\sum\_{m=-\infty }^{\infty }x(n)x(n-m)$

可以看作是一类特殊的信号与系统的相互作用。

1. 功率信号相关的定义

**rxy(m) =** $\lim\_{N\to \infty }\frac{1}{2N+1}\sum\_{m=-N}^{N}x(n)y(n-m)$**, 周期为N**

注意，在信号处理中，相关从物理概念上可以理解为两个信号的相似程度。rxy(m)的绝对值越大，并不能说明信号的相似程度越强。信号处理中用相关系数ρxy(m)来更细致地描述信号的相似程度，可认为是归一化的rxy(m)。对能量信号来说，归一化因子为信号的能量；对功率信号来说，归一化因子为信号功率。完全相似不是完全相同。相关是描述噪声(随机信号)必不可少的工具。

随机信号的幅度、相位均随时间做无规律的、未知的、随机的变化。这次测出的是这种波形，下次测出的可能会是另外一种波形。无法用确定的时间函数来描述，无法准确地预测它未来的变化。但是，随机信号的统计规律是确定的，因此，人们用统计学方法建立了随机信号的数学模型——随机过程。

随机信号分为平稳和非平稳两大类。

平稳随机信号——其均值和相关不随时间变化。平稳随机过程在时间上是无始无终的，即它的能量是无限的，只能用功率谱密度函数来描述随机信号的频域特性。

平稳随机信号又分为各态历经和非各态历经。

各态历经信号——指无限个样本在某时刻所历经的状态，等同于某个样本在无限时间里所经历的状态的信号。各态历经信号一定是平稳随机信号，反之不然。

随机信号不能用确定的时间函数来表达，只能通过其随时间或其幅度取值的统计特征来表达。这些统计特征值有：

①数学期望值，描述随机信号的平均值。

②方差值，描述随机信号幅度变化的强度。

③概率密度函数，是描述信号振幅数值的概率。

④相关函数，描述随机信号的每两个具有一定时间间隔的幅度值之间的联系程度的数值，它是时间间隔的一个函数。

⑤功率谱密度，描述随机信号在平均意义上的功率谱特性。

以上这些统计特征是描述随机信号的主要数字特征。研究随机信号的数学方法是随机过程理论。

**相关的频域描述**

1 对于能量信号来说

相关的傅里叶变换Rxy($e^{jω}$)可以看作是X($e^{jω}$)和Y($e^{jω}$)的共轭的乘积

**Rxy(**$e^{jω}$**) = X(**$e^{jω}$**)Y\*(**$e^{jω}$**)， Rxx(**$e^{jω}$**) = X(**$e^{jω}$**)X\*(**$e^{jω}$**) = | X(**$e^{jω}$**)|2**

2 对于功率信号来说

**功率信号不满足傅里叶变换的绝对可积的条件，其傅里叶变换是不存在的。**对于功率信号来说，功率谱针对能量无限（功率有限）的功率信号，包括随机信号与周期信号，Rxx(ejw)也称为信号的功率谱，也用Pxx(ejw)表示。功率谱Rxx(ejw)和自相关rxx(m)之间是一对傅里叶变换对。这就是**维纳-辛钦定理**，为功率信号的时域与频域之间的分析架起了一座桥梁。（噪声，随机过程）

**从相关的角度看噪声**

1. 噪声的平稳性，从严格意义上说，指的是联合概率密度与时间的起点无关，只与相差的时间有关，这种平稳也称为狭义平稳。从更广泛意义上说，平稳性指的是其均值为常数，相关函数与时间起点无关，只与相差的时间有关，这种平稳也称为广义平稳或者宽平稳。

对于随机变量和随机过程来说，迄今为止人们所能采用的最科学的方法自然是用概率密度进行描述。但这种方法不仅相当复杂，而且不太实用。在信号处理中，通常以相关为核心来描述随机过程。

**随机过程**(Stochastic Process)是一连串随机事件动态关系的定量描述。

随机信号的数字特征如果本身也是随较长的时间变化而变化的话，那么这种随机信号属于非平稳随机过程。否则均属于平稳随机过程。平稳随机过程的分析比较成熟，也相对容易一些。而非平稳的随机过程，比较不容易计算。对于平稳随机过程，由于其统计数字特征不随时间变化，因此许多分析方法与研究非随机过程的方法相似，傅里叶变换方法仍是主要的分析工具。

用均值和相关就可以充分描述一个平稳的随机过程，处理相对比较简单。

1. 经典信号处理中噪声默认是高斯平稳的(广义平稳)；
2. 噪声可以用相关这个概念来很好的描述。

**高斯白噪声的理解**

高斯噪声是在给定的时刻n，噪声v(n)是一个随机变量，这个随机变量服从高斯分布，或者说正态分布。没有特别指明的情况下，高斯白噪声指的是零均值的高斯白噪声。白噪声是指包含了所有频率的噪声。

**因为噪声是功率信号，无法计算其傅里叶变换，因而在频域无法用频谱来描述，只能采用功率谱这个概念，Pvv(ejw)=**$σ\_{v}^{2}$ **。由维纳-辛钦定理可知，功率谱的反傅里叶变换就是自相关，即rvv =** $σ\_{v}^{2}δ(m)$**。**

频域上的“白”指的是全频段的特性一致，而在时域上“白”指的是不同时刻的噪声不相关。带宽表示的是变化快慢的范围。频域上的带宽无限大，表示的是时间上变化的无限快。这样就可以很自然地推断出时间上即便是相邻的两个噪声值，因其变化太快，也是不相关的。

高斯噪声和白噪声是两类相互独立的噪声。高斯噪声表征的是噪声所服从的概率分布是高斯的。白噪声，从时域上看表征的是不同时刻之间噪声的不相关，从频域上看表征的是噪声的全频段特性。

对一般的随机信号而言，功率谱在物理上的意义都可以理解为平均功率。因为随机信号具有不确定性，任何单个的样本都不能表征其全貌，只能从平均的意义上来描述。

**相关可以理解为一类时域特殊的平均，功率谱可以理解为一类频域特殊的平均。**相关和功率谱之间存在傅里叶变换的关系。

对于能量信号，除了可以用频谱表示之外，还可以用能量谱来描述。所谓的能量谱，也称为能量谱密度，是指用密度的概念表示信号能量在各频率点的分布情况。也即是说，对能量谱在频域上积分就可以得到信号的能量。能量谱是信号幅度谱的模的平方，其量纲是焦/赫。

理论上，只有能量信号的傅里叶变换才存在。

对于功率信号，常用功率谱来描述。所谓的功率谱，也称为功率谱密度，是指用密度的概念表示信号功率在各频率点的分布情况。也就是说，对功率谱在频域上积分就可以得到信号的功率。从理论上来说，功率谱是信号自相关函数的傅里叶变换。因为功率信号不满足傅里叶变换的条件，其频谱通常不存在，维纳-辛钦定理证明了自相关函数和傅里叶变换之间对应关系。在工程实际中，即便是功率信号，由于持续的时间有限，可以直接对信号进行傅里叶变换，然后对得到的幅度谱的模求平方，再除以持续时间来估计信号的功率谱。

频谱反映的是信号的幅度和相位随频率的分布情况，它在频域中描述了信号的特征。同时，我们也可以用能量谱和功率谱来描述信号，它们反映了信号的能量或功率密度随频率的变化情况，它对于研究信号的能量（或功率）的分布，决定信号所占有频率等问题有着重要的作用。特别是对随机信号，无法用确定的时间函数来表示，也就无法用频谱表示，往往用功率谱来描述它的频率特性。

信号通过系统，在时域上来看是卷积，在频域上看是相乘。只有当系统的频率响应为常数，即系统为全通系统时，高斯白噪声通过系统后仍然是高斯白噪声，否则就变成高斯噪声了。

**最佳接收系统**

x(n)=s(n)+v(n)，x(n)为回波，s(n)为回波信号，v(n)为回波噪声。

y(n)=so(n)+vo(n)，表示输出

系统输出的信噪比定义为输出信号的功率与输出噪声功率之比：

$\left(\frac{S}{N}\right)\_{0}=\frac{P\_{s}}{P\_{v}}$，其中，$P\_{s}$为so(n)的瞬时功率，$P\_{v}$为vo(n)的平均功率。

被噪声污染的信号通过LTI系统，其输出的信噪比最大为Es/$σ\_{v}^{2}$。而且只有当系统的频率响应为：H(ejw) = KS\*(ejw)$e^{-jωn\_{0}}$，输出在n=n0 ，时刻的信噪比达到最大值，这样的系统也称为**匹配滤波器**。即最佳接收系统的频率响应是回波信号的傅里叶变换先求共轭，再乘上一个相移因子。

时域：h(n) = Ks(n0-n)，即最佳接收系统的单位冲激响应式回波信号在时间轴上先折叠，再平移。

**频域分析**

最佳接收系统的幅频响应等于回波信号的幅频特性，在没有信号分量的频率上，噪声完全被抑制。信号通过系统之后，相位都被抵消了，这样所有的不同频率的信号在0时刻的相位都是相同的，因而在这个时刻点上的输出具有最大值。

**时域分析**

so(n)=rss(n-n0)，系统输出信号实际上就是回波信号的自相关函数。最佳接收系统又称为相关接收系统。一般情况下，噪声和信号是没有相似性的，因此，通过相关接收系统之后，很自然就尽可能抑制了噪声。信号和自身是最相似的，就尽可能的放大了信号。

在高斯白噪声背景下，错误概率最小准则下的最佳接收系统等效于输出信噪比最大准则下的最佳接收系统。

卷积表征的是一般意义上的信号与系统的相互作用，即任意的信号通过LTI系统(由单位冲激响应来表示)，都可以表示为卷积的关系。而相关表示的则是信号通过最佳接收系统这一特殊的系统。

对确定性的信号，特别是非周期的确定性信号，常用能量谱来描述。面对随机信号，由于理论上持续时间无限长，不满足绝对可积与能量可积的条件，因此不存在傅里叶变换，所以常用功率谱来描述。周期性的信号，也同样是不满足傅里叶变换的条件，也常用功率谱来描述。

**第五章 离散傅里叶变换DFT**

**离散傅里叶变换**

**X(k) =** $\sum\_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2π}{N}kn}$

**离散傅里叶逆变换**

**x(n) =** $\frac{1}{N}\sum\_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j(2π/N)nk}$

X(k)通常为复数，可用实部虚部的方式，也可以表示为幅度相位的方式。

频率，幅度，初始相位这三个参数完全决定了一个复正弦信号。

对离散时间信号来说，信号的频谱表示为信号的DTFT。比较DTFT和DFT的表达式，可以很容易的发现：

X(k) = X($e^{jω}$)$|\_{ω=(2π/N)k}$

可以发现，X(k)是X($e^{jω}$)的采样值，即DFT是DTFT的采样值，采样间隔为2π/N.

在 $ω=2πf/f\_{s}$，f表示信号的模拟频率(即线频率)，fs为系统采样频率，$ω$为对应的数字频率。现实中的信号多是模拟信号，离散信号多是从模拟信号采样得到的。模拟频率的物理意义非常清晰(表示物体震动快慢的物理量)。

DFT结果幅度和相位的理解

**在X(k) =** $\sum\_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2π}{N}kn}$**中，令Bn=x(n)**$ e^{-j\frac{2π}{N}k\_{0}n}$**,Bn 为单位圆上的旋转向量，**

**旋转的速度为**$∆φ=ω\_{0}-2πk\_{0}/N$**，则X(k) =** $\sum\_{n=0}^{N-1}B\_{n}$

随着$∆φ$的增加，向量相加的结果的幅度会逐步减小，相位则会逐步增加。同时在DFT的结果中包含了原始信号的初相信息。

DFT具有：隐含的周期性和循环卷积的特性，与DTFT和Z变换不同。

X(k)的幅频特性和相频特性都隐含着是周期性了。X(k)和x(n)都是周期函数，周期分别为N和n。

频域的采样同样等效于时域的周期延拓，并且延拓的周期为N。只要对x(n)进行DFT，客观上就已经将x(n)进行周期延拓了(N可以很大，主观上我们还没有意识到)。

隐含着周期性条件下的卷积称为循环卷积，又称为圆周卷积。数学公式表示为：

y(n) = h(n)$⊗$x(n) = $\sum\_{m=0}^{N-1}h(m)x((n-m)\_{N})$，0$\leq n\leq $N-1，

其中$((n-m)\_{N}$表示的是周期性的x(n)移位m点之后，再取0$\leq n\leq $N-1这个区间的值。又称为循环移位或圆周移位。同样隐含着周期性。

Y(k) = X(k) . H(k)，表明在DFT的背景下，仍然存在联系时域与频域的卷积定理，但定理形式有所变化，是在隐含周期性条件下的卷积定理，称为循环卷积定理。

循环卷积数学化意味更加强烈，而物理意义更不明确。

信号比较长的时候，卷积的计算非常耗时，而根据卷积定理，时域的卷积等效为频域的相乘，乘法的运算要简单得多，因此很自然的希望在频域计算卷积。但信号的DTFT在频域上是连续的，无法数字实现，这时只能用到DFT。信号的频域计算是通过DFT实现的，与之对应的卷积成了循环卷积。

常用信号的DFT：

1. 单位冲激信号 : X(k)的幅度均为1，相位均为0
2. 复正弦信号
3. 脉冲信号：脉冲信号与sinc函数互为傅里叶变换对。脉冲信号的幅频特性的形状为sinc函数，相位特性为线性相位。（分清sinc函数的零点位置）

数学上的sinc函数定义为 y = sinc(x) = sin (x)/x

Sinc函数由一系列的波峰和波谷构成，幅度最高的波峰为主瓣，其余的波峰和波谷为副瓣。

DFT的卷积理解

X(k) = yk(m)|m=N = x(m) \* hk(m) |m=N

其中，hk(m) = exp(j(2π/N)km) m$\geq $0

对于任意给定的k=k0, 都可以看作是信号x(m)通过系统$h\_{k\_{0}}\left(m\right)$在m=N时刻的输出。因此，x(n)的DFT结果X(k)，可以看作是信号x(n)通过一组滤波器$h\_{k\_{0}}\left(n\right)$在n=N时刻的输出。

令 hk(n) = exp(j(2π/N)kn)，n =1,2,3,4…N，由hk(n) 的频率响应可知，当k取值不同时，hk(n)的幅频特性形状都完全一样，都具有sinc函数的形状，不同的只是频率中心发生变化，第k0个滤波器$h\_{k\_{0}}(n)$的频率中心位于$ω$=2πk0/N。（注意观察滤波器组的幅频特性）

在信号处理中，频域分析基本上就等同于傅里叶分析，但就傅里叶分析来说，又有多种具体的方法，比如对离散信号有离散时间傅里叶变换（DTFT），离散傅里叶变换（DFT）。对连续信号有傅里叶级数（FS）、傅里叶变换（FT）。

1. 傅里叶级数FS

在满足一定条件下，任何一个周期信号都可以分解为正弦信号的叠加。周期连续 <-> 非周期离散

1. 傅里叶变换FT

即傅里叶积分。非周期连续 <-> 非周期连续

1. 离散时间傅里叶变换DTFT

对非周期的连续信号进行时域采样，得到非周期的离散信号，非周期离散信号的傅里叶分析称为离散时间傅里叶变换。DTFT是周期的。非周期离散 <-> 周期连续

1. 离散傅里叶变换DFT

对周期离散信号的傅里叶分析称为离散傅里叶变换。周期离散 <-> 周期离散

注：实际上，按照传统命名规则，离散傅里叶变换叫离散傅里叶级数或离散时间傅里叶级数更为妥当。而对非周期离散信号的傅里叶分析才应该叫离散傅里叶变换。但本书中将离散傅里叶级数的分析隐含在离散傅里叶变换中。

**在FS、FT、DTFT、DFT中，时域的周期性对应着频域的离散性，时域的离散性对应着频域的周期性。最重要的是DFT。因为前面三种都需要假定信号的时域或者频域是无限长的。计算机等数字设备只能处理数字信号，也即要求无论是时域还是频域，都要是离散的。**

DFT与DTFT

DFT可以看作是DTFT在频域上的等间隔采样的结果。DFT定义为X(ejw)间隔为$∆ω=2π/N$的等间隔采样，因而不存在混叠。由于DFT不存在时域上的混叠，因此由X(k)可以不失真地恢复出X(ejw), 数学表达式为

$$X\left(e^{jω}\right)= \sum\_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jωn}=\frac{1}{N}\sum\_{n=0}^{N-1}X(k)\sum\_{n=0}^{N-1}e^{j\left(\frac{2π}{N}k-ω\right)n}=\frac{1-e^{-jωN}}{N}\sum\_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-e^{j2πk/N}e^{-jω}}$$

1. **泄漏**

造成泄漏的原因主要是DFT所等效的N个滤波器组中，没有一个滤波器的中心频率和信号的频率相等，导致单频复正弦信号在滤波器主瓣内幅度有所抑制，信号能量有一部分散落到滤波器的副瓣内。

频谱泄漏是经常的，危害也很大，会导致信号的误判。分为主瓣泄漏和副瓣泄漏。

实际的信号都被噪声污染了，副瓣的值很难参考。

主瓣泄漏是因为复正弦信号的频率同时处于两个滤波器的主瓣范围内副瓣泄漏则是由于滤波器存在副瓣。为了抑制频谱泄漏，不仅要降低滤波器的主瓣宽度，同时还希望降低副瓣的宽度。

1. **加窗**

数据截短的过程称为加窗，数据截短会带来频谱的泄漏。直接对数据进行截短，等效于将信号与脉冲信号相乘。时域上的突然变化，意味着频域上存在很高的频率分量。所以只要抑制了这些高频分量，就能降低副瓣电平，从而有效抑制副瓣的泄漏。窗函数起始处和结束处越平坦，对副瓣的抑制应该会越好。频率分辨率通常与主瓣宽度的变化趋势一致，即主瓣越宽，频率分辨率越低。

1. **分辨率**

主瓣半功率点之间的宽度。在DFT中，通常用2π/N来表示脉冲信号的数字频率分辨率，用1/T表示模拟频率分辨率。脉冲信号的频率分辨率为脉冲宽度的倒数。为了提高频率分辨率，要尽量增加信号的有效长度。当信号持续时间为无限长的时候，其频率分辨率趋于0。时间分辨率越好，则对应的频率分辨率越差，这就是信号处理中的不确定性原理。

1. **补零**

**DFT**可以看作是对离散信号连续频谱在频域的采样，只要频域采样点数M大于等于时域长度N，则可以减小栅栏效应，同时也满足频域采样不混叠的要求。在频域上增加采样点数等效于在时域上补零。从信息的角度，补零并不增加新的信息，自然也就谈不上改善分辨率。

区分物理分辨率和计算分辨率。矩形窗的物理分辨率为0.89\*π/N，计算分辨率为2π/N。两者非常接近，但不完全相等。

1. **增益**

信号处理系统的一个目标是尽量放大信号而抑制噪声，这个目标通常是用增益来表征的。

增益 G = $\frac{SNR\_{out}}{SNR\_{in}}$，分子分母分别表示输出输入信噪比。

DFT能够很好地抑制噪声，其增益与DFT的点数N有关，G = 10log10N。对信号所在的窄带滤波器来说，信号能完全通过，而噪声却只能通过1/N。

**第六章 快速傅里叶变换FFT**

在工程实践中，DFT面临的主要问题是运算效率低，很难用于实时处理。

**X(k) =** $\sum\_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2π}{N}kn}$**=**$\sum\_{n=0}^{N-1}x(n)W\_{N}^{kn}$**，**$W\_{N}^{kn}$**为自旋转因子**

DFT的运算量与N2成正比，显然N越小越有利，因此就很自然地希望能将大点数的DFT分解为多个小点数的DFT来计算，分解过程中充分利用旋转因子的对称性，周期性，可约性和特殊值。

FFT算法主要分为两大类：按时间抽取方法（DIT）和按频率抽取方法（DIF）。根据抽取长度，FFT又分为基-2、基-4等算法，在一个DFT运算中还可以同时采用不同基的混合基算法，也称为分裂基算法。

**基-2 DIT FFT算法**

按时间抽取算法是指在时间上将信号长度逐步减小的算法，基-2算法则是指以2为基底降低信号长度的过程。

X(k) = X0(k) + $W\_{N}^{k}X\_{1}(k)$， k= 0,1,…, N/2 -1

X(k+N/2) = X0(k) - $W\_{N}^{k}X\_{1}(k)$， k= 0,1,…, N/2 -1

一次分解后，运算量近似为直接计算的1/2.一点的DFT就是信号本身，两个一点的DFT或者一个两点的DFT，正好构成一个基本的蝶形运算。因此，通常将大点数DFT按级分解，直到DFT的点数变为2.（即将N点的DFT分解为N/2个2点的DFT）

级的概念：M= $log\_{2}^{N}$

同址运算：原位运算，指的是在运算过程中，输入和输出占用相同的存储地址，从而可以节约存储空间，进而节约存储空间。存放数据的存储单元始终为N个。

输入信号不是按自然顺序存储的看起来好像杂乱无章，但实际上是按照倒位序排列的（偶数在上，奇数在下）。

倒位序的实现：当n=$$时，不必调换。否则，必须将x(n)与x($$)调换。

在DIF FFT（按频率抽取）中，输入x(n)是正常顺序的输出X(k)是倒位序的。

分裂基FFT算法，先是如基-2算法一般将x(n)分解为偶数点部分和奇数点部分。对偶数点部分按基-2算法来分解，对奇数点部分是按基-4算法来分解。分裂基FFT算法同样也可以按时间抽取或者按频率抽取。

在满足基-4算法运算条件的前提下，基-4算法效率比基-2算法更高。在已知的N=2M的各种算法中，分裂基算法的运算效率是最高的。

基-2，基-4和分裂基算法都是常用的FFT算法。基-4算法虽然运算效率高于基-2算法，但其所要求的N=4M的条件比基-2算法要严苛。在不满足的情况下，补零的个数过多，反过来降低了运算效率。分裂基算法的运算效率也高于基-2算法，但编程的复杂度也比较高。因此，在实际中最常用的还是基-2算法。

**旋转因子的生成**

在实际的FFT运算中，通过计算$W\_{N}^{n}=\cos(\left(\frac{2πn}{N}\right))-jsin(2πn/N)$来生成旋转因子。一种有效的方法是查表法。

**IDFT的快速计算**

IDFT：$x=\frac{1}{N}\sum\_{k=0}^{N-1}X(k)W\_{N}^{-nk}=\frac{1}{N}[\sum\_{k=0}^{N-1}X^{\*}(k)W\_{N}^{nk}]^{\*}$

**实信号的FFT(提高效率)**

1. 两个实信号的FFT
2. 一个2N点的实信号的FFT

将实信号的FFT转换为复信号的FFT。

在数字信号处理的工程实现中，往往用DSP芯片来实现具体的算法对每一种型号的DSP，硬件开发商都会给出优化后的FFT算法源代码一般情况下直接调用就可以。但是，在某个具体的应用中，可能会遇到大点数FFT的问题，因为芯片内存不足而导致FFT需要分解的问题。

**两类特殊的频率分析算法**

有时只需要计算某个或者某几个频点的X(k)值，而不需要计算所有的X(k)的值。也许有时候只需要分析信号在某一个很小频段的频段值，而且要对这很小频段范围的频谱值进行比较精细的分析，此时也无法直接用FFT算法。

1. **Goertzel算法**

利用递推的方法来计算频谱值，在只需要计算很少几个频点的频谱值得情况下，Goertzel的效率高于FFT算法。

1. **ChirpZ算法**

利用卷积的方式来实现频谱的分析，期间也用到了FFT。当分析的信号频带很窄的时候，并且要求的分辨率非常高的情况下，用ChirpZ算法比补零FFT效率更高。实际上,ChirpZ算法不仅是分析频域，它还能分析Z平面上任意一段弧线的响应。

**第七章 数字滤波器概述**

数字滤波器是一个按预定的有限精度算法实现的、将输入的数字信号转换为所需要的输出数字信号的线性时不变系统LTI。

滤波器是是一种对信号有处理作用的器件或电路，其主要作用是让有用信号尽可能无衰减的通过，对无用信号尽可能大地衰减。由电阻，电容和电感等元件组成的模拟滤波器广泛应用于各种信号处理系统中，优点是处理速度快，处理带宽大，无需ADC及DAC器件；其缺点是稳定度及精度比较差，可重复性不强及抗干扰能力弱。

数字滤波主要有两种用途：信号的分离和失真信号的恢复

没有特别指明的情况下，数字滤波器与线性时不变系统是等价的，因此，描述LTI系统的工具均可用于描述数字滤波器，这些描述工具包括：差分方程，单位冲激响应，传递函数（H(z)=Y(z)/X(z)），频率响应(幅频响应和相频响应)等。

数字滤波器的分类

1. **从单位冲激响应的角度分类**

有限冲激响应FIR和无限冲激响应IIR

1. **从频率响应的角度分类**

低通滤波器，高通滤波器、带通滤波器、带阻滤波器、全通滤波器(用于改善信号的相频响应)

**实际数字滤波器的性能参数**

截止频率：滤波器增益为0.707时的频率，即-3dB所对应的频率。

通带边沿频率：滤波器增益为1-$δ\_{p}$时的频率。截止频率通常要大于通带边沿频率。

增益和衰减都表示滤波器对某个频率分量幅度上的影响，增益通常指对信号的放大，衰减通常对信号的抑制。假定通带偏差$δ\_{p}=0.1$，阻带偏差$δ\_{s}=0.05$，如果理想增益为1，则通带边沿增益为1-0.1=0.9或20log100.9=-0.915dB，阻带边沿增益为0.05或20log100.05=-26.02dB。用dB做单位时，衰减是增益的负值。这样，也可以说是通带边沿的衰减为0.915dB，阻带边沿的衰减为26.02dB。

表征实际的数字滤波器的性能参数时，更重要的却是单位阶跃响应，即滤波器输入为单位阶跃信号时滤波器的输出。阶跃函数是表现两个不同区域之间边界的最好方式，它能标记事件何时发生、何时结束，也能指出分界点左边的事物与右边的事物有何不同。一组阶跃函数把信号分割成有相似特性的若干段，而阶跃响应则描述了滤波器如何修改这些分界线。

 讨论实际滤波器的性能时，时域参数和频域参数都没有考虑滤波器的相位。这主要是因为相位在有些频域应用中不太重要。比如，语音信号中的相位几乎是随机的，而且不包含任何有用的信息。另外，相位的失真比较容易补偿。在确定了幅频响应的情况下，相频响应可通过全通滤波器很方便地调整。

数字滤波问题的一般解决方案

过程如下：

1. 在具体的应用背景中提取出数字滤波器的性能参数。
2. 选择合适的滤波器类型，主要是确定使用FIR滤波器还是IIR滤波器
3. 采用适当的方法，利用计算机辅助软件，计算出滤波器的系数
4. 用一个适当的结构来表示滤波器。
5. 分析有限字长对滤波器性能的影响。
6. 用软件及硬件来实现滤波器算法。

频域性能出色的滤波器往往时域性能较差，反之一样。

在确定滤波器类型时，有两点比较确定:一是当过渡带宽这个指标非常重要并且要求非常苛刻的时候，也即滤波器要求锐截止时，首选IIR滤波器，因为此时用FIR滤波器所需的系数非常多，效率低；二是当相位的线性性要求非常苛刻时，首选FIR滤波器，因为即便增加相位补偿处理，IIR滤波器在边沿仍然有比较明显的非线性。

**第八章 有限冲激响应滤波器**